

EIN VERFAHREN ZUR DIREKTEN NUMERISCHEN SIMULATION TURBULENTER
STRÖMUNGEN IN PLATTEN- UND RINGSPALTKANÄLEN UND ÜBER SEINE AN-
WENDUNG ZUR UNTERSUCHUNG VON TURBULENZMODELLEN

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR - INGENIEURS

von der Fakultät für Maschinenbau der
Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

D I S S E R T A T I O N

von

Dipl.-Ing. Ulrich Schumann

aus Halle / Saale

Tag der mündlichen Prüfung:	10. Juli 1973
Hauptreferent:	Prof. Dr. rer. nat. Dieter Smidt
Korreferent:	Privatdozent Dr.-Ing. Ulrich Müller

Diese Dissertation wird als Bericht der Gesellschaft für
Kernforschung mbH. (KFK 1854) veröffentlicht.



Zusammenfassung

Es wird ein numerisches Differenzenverfahren vorgestellt, mit dem der dreidimensionale, instationäre, inkompressible turbulente Impulstransport bei großen Reynolds-Zahlen in Platten- und konzentrischen Ringspaltkanälen simuliert werden kann.

Aufbauend auf der Arbeit von Deardorff werden die über Differenzenmaschen gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen integriert. Für die Feinstruktur der Turbulenz innerhalb der Maschen werden neuartige Modelle entwickelt, mit denen insbesondere stark inhomogene Turbulenz, sowie ungleichseitige Differenzennetzmaschen berücksichtigt werden. Die Voraussetzungen der Modelle werden dargestellt und diskutiert.

Für das verwendete und für ähnliche Differenzenverfahren werden Stabilitätskriterien aufgestellt. Zur Berechnung des Druckes wird die bestimmende Poisson-Gleichung mit Hilfe der Schnellen Fourier-Transformation bis auf Rundungsfehler exakt gelöst.

Mit dem entwickelten Programm TURBIT-1 werden turbulente Strömungen in Platten- und einem Ringspaltkanal mit Radienverhältnis 5:1 berechnet. Hierbei werden verschiedene Fälle mit maximal 65536 Ortsmaschen realisiert. Die numerischen Ergebnisse stimmen jedoch schon für kleinere Maschenzahlen gut mit Meßwerten überein. Insbesondere das Geschwindigkeitsprofil und die mittleren Geschwindigkeitsschwankungen werden merklich genauer als in früheren entsprechenden Arbeiten berechnet.

Am Beispiel des Energie-Längen-Modells sowie der Korrelationen zwischen Druck- und Geschwindigkeitsgradienten wird die Brauchbarkeit des Verfahrens zur quantitativen Bestimmung von Turbulenzmodellen gezeigt.

Weiterhin enthält die Arbeit einen Überblick über frühere Ergebnisse sowie Vorschläge für weiterführende Arbeiten.

A PROCEDURE FOR THE DIRECT NUMERICAL SIMULATION OF TURBULENT
FLOWS IN PLANE CHANNELS AND ANNULI AND ITS APPLICATION IN THE
DEVELOPMENT OF TURBULENCE MODELS .

Summary

A numerical difference scheme is described to simulate three-dimensional, time-dependent, turbulent flows of incompressible fluids at high Reynolds numbers in a plane channel and in concentric annuli.

Starting from the results of Deardorff, the Navier-Stokes equations, averaged over grid volumes, are integrated. For description of the subgrid scale motion a novel model has been developed which takes into account strongly inhomogeneous turbulence and grid volumes of unequal side lengths. The premises used in the model are described and discussed.

Stability criteria are established for this method and for similar difference schemes. For computation of the pressure field the appropriate Poisson's equation is solved accurately, except for rounding errors, by Fast Fourier Transform.

The procedure implemented in the TURBIT-1 program is used to simulate turbulent flows in a plane channel and an annulus of 5:1 ratio of radii. For both types of flow different cases are realized with a maximum number of grid volumes of 65536. Already for rather small grid volume numbers the numerical results are in good agreement with experimental values. Especially the velocity profile and the mean velocity fluctuations are computed with significantly better accuracy than in earlier, direct simulations.

The energy - length-scale model and the pressure-strain correlation are used as examples to show that the method may be used successfully to evaluate the parameters of turbulence models.

Earlier results are reviewed and proposals for future research are made.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Zusammenfassung	I
<u>1. Einleitung</u>	1
1.1 Turbulenz	1
1.2 Geometrie, Randbedingung, Stoffwerte, Bezugsgrößen	3
1.3 Grundgleichungen	4
1.4 Abgeleitete Grundgleichungen	6
1.4.1 Erhaltungsgleichung der kinetischen Energie	7
1.4.2 Bestimmungsgleichung für den Druck (Poisson-Gleichung)	8
1.5 Prinzipien der numerischen Simulation turbulenter Strömungen	8
1.5.1 Direkte bzw. Modellsimulation	8
1.5.2 Methoden der numerischen Simulation	9
1.5.3 Deardorffs Verfahren	12
1.6 Auflösungsvermögen und Notwendigkeit von Feinstrukturmodellen	13
1.6.1 Physikalisch geforderte Auflösung zur direkten Simulation turbulenter Strömungen	13
1.6.2 Erreichbare Auflösung und Schlußfolgerung	14
1.7 Zieldefinition dieser Arbeit	16
<u>2. Statistische Turbulenzmodelle</u>	16
2.1 Notwendigkeit von Turbulenzmodellen und Ziel der Modelltheorien	17
2.2 Das Prandtl'sche Mischungswegmodell	18
2.3 Energie-Modell nach Prandtl	20
2.4 Längen-Modell nach Rotta	21
2.5 Methoden zur Bestimmung der Modell-Konstanten	22
2.6 Angaben für die Konstantenwerte, den Einfluß der Unsicherheiten der Konstanten sowie deren numerische Bestimbarkeit	24

	Seite
<u>10. Numerische Ergebnisse</u>	92
10.1 Spezifikation der berechneten Fälle	92
10.2 Qualitative Beschreibung und Beurteilung der Ergebnisse	93
10.2.1 Räumliche Strömungsbilder	93
10.2.2 Zeitfunktion und Spektren	94
10.2.3 Problem der Mittelwertbildung	95
10.2.3 Anteil der makroskopischen Struktur an den turbulenten Vorgängen	95
10.3 Quantitativer Vergleich mit Experimenten	96
10.3.1 Maximale Geschwindigkeit	96
10.3.2 Geschwindigkeitsprofil	96
10.3.3 Schwankungsgeschwindigkeiten	97
10.3.4 Axiale Korrelationen	97
10.4 Einfluß der Modellparameter	98
10.4.1 Integrationszeit (Stationarität)	98
10.4.2 Periodenlängen	99
10.4.3 Maschengrößen	99
10.4.4 Zeitschritt Δt	100
10.4.5 Effekt der Integration der Feinstrukturenergiegleichung	100
10.4.6 Die Korrekturkonstanten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	102
10.4.7 Probleme des Modells	102
10.5 Bestimmung von Turbulenzmodell-Konstanten	103
10.5.1 Zum Energie-Längen-Modell	103
10.5.1.1 Berechnung der zu approximierenden Größen	103
10.5.1.2 Berechnung der Konstanten a_1	103
10.5.1.3 Bestimmung der Konstanten a_4 und a_5	104
10.5.2 Zur Druck-Deformationsgeschwindigkeits-Korrelation	106
10.5.2.1 Berechnung der zu approximierenden Terme	106
10.5.2.2 Bestimmung der Konstanten k_p	106
<u>11. Schlußfolgerungen</u>	108
11.1 Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse	108
11.2 Vorschläge zur Anwendung und Weiterentwicklung der dargestellten Methoden	110

	Seite
5.2.4	Invarianz-Eigenschaften des Ansatzes 68
5.2.5	Übertragung auf zylindrische Koordinaten und nichtäqui- distanten Maschen 70
<u>6.</u>	<u>Differenzenverfahren</u> 72
6.1	Lineare Differenzenapproximationen 72
6.2	Differenzenformeln 74
6.2.1	Differenzenformeln für den Impuls 74
6.2.2	Differenzenformeln für den Druck bzw. das Hilfspotential ψ 75
6.2.3	Differenzenform der Energiegleichung 78
6.3	Genauigkeit und Stabilität der Differenzenformeln 79
6.3.1	Genauigkeit 79
6.3.2	Stabilität 80
<u>7.</u>	<u>Randbedingungen</u> 82
7.1	Periodizitätsbedingung 82
7.2	Exakte Wand-Bedingung und Galilei-Transformation 83
7.3	Wandbedingung für die axiale Geschwindigkeitskomponente 83
7.4	Wandbedingung für die azimutale Geschwindigkeitskomponente 85
7.5	Berechnung der mittleren Wandschubspannungen 85
7.6	Wandbedingungen für die kinetische Energie \sqrt{E} 86
7.7	Wandbedingung für den Druck 86
<u>8.</u>	<u>Anfangswerte</u> 88
8.1	Anfangswerte des Geschwindigkeitsfeldes 88
8.2	Anfangswerte der kinetischen Energie \sqrt{E} 89
<u>9.</u>	<u>Über das Programm TURBIT-1</u> 90

	Seite
<u>10. Numerische Ergebnisse</u>	92
10.1 Spezifikation der berechneten Fälle	92
10.2 Qualitative Beschreibung und Beurteilung der Ergebnisse	93
10.2.1 Räumliche Strömungsbilder	93
10.2.2 Zeitfunktion und Spektren	94
10.2.3 Problem der Mittelwertbildung	95
10.2.3 Anteil der makroskopischen Struktur an den turbulenten Vorgängen	95
10.3 Quantitativer Vergleich mit Experimenten	96
10.3.1 Maximale Geschwindigkeit	96
10.3.2 Geschwindigkeitsprofil	96
10.3.3 Schwankungsgeschwindigkeiten	97
10.3.4 Axiale Korrelationen	97
10.4 Einfluß der Modellparameter	98
10.4.1 Integrationszeit (Stationarität)	98
10.4.2 Periodenlängen	99
10.4.3 Maschengrößen	99
10.4.4 Zeitschritt Δt	100
10.4.5 Effekt der Integration der Feinstrukturenergiegleichung	100
10.4.6 Die Korrekturkonstanten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	102
10.4.7 Probleme des Modells	102
10.5 Bestimmung von Turbulenzmodell-Konstanten	103
10.5.1 Zum Energie-Längen-Modell	103
10.5.1.1 Berechnung der zu approximierenden Größen	103
10.5.1.2 Berechnung der Konstanten a_1	103
10.5.1.3 Bestimmung der Konstanten a_4 und a_5	104
10.5.2 Zur Druck-Deformationsgeschwindigkeits-Korrelation	106
10.5.2.1 Berechnung der zu approximierenden Terme	106
10.5.2.2 Bestimmung der Konstanten k_p	106
<u>11. Schlußfolgerungen</u>	108
11.1 Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse	108
11.2 Vorschläge zur Anwendung und Weiterentwicklung der darge- stellten Methoden	110

VII

	Seite
Anhang 1: Aus der Theorie isotroper Turbulenz und über ihre experimentelle Abstützung	111
Anhang 2: Berechnung von Korrelationen zwischen räumlichen Mittelwerten	123
Anhang 3: Bestimmung der Konstanten c_1	134
Anhang 4: Lösung der Poissongleichung unter Verwendung der Schnellen Fourier-Transformation	140
Anhang 5: Genauigkeit und Konsistenz der Differenzenformeln	146
Anhang 6: Stabilität der Differenzenformeln	152
Anhang 7: Berücksichtigung ungleichseitiger Maschen im Quellterm der Feinstruktur-Energiegleichung	162
Anhang 8: Programmtests für laminare Strömungen	164
Verzeichnis häufig verwendeter Symbole	167
Literatur	175
Tabellen	186
Abbildungen	203

Die vorliegende Dissertation entstand am Institut für Reaktor -
entwicklung im Kernforschungszentrum Karlsruhe.

Für die Förderung dieser Arbeit gilt mein Dank insbesondere
Herrn Prof. Dr. D. Smidt.

Für die Übernahme des Korreferates und zahlreiche wertvolle Dis-
kussionen danke ich Herrn Privatdozent Dr. U. Müller.

Ständige Förderung verdanke ich Herrn Dr. E. G. Schlechtendahl.
Den Institutskollegen, namentlich Herrn Dr. D. Kirsch, bin ich für
intensive Durchsicht der Arbeit dankbar.

Besonders erwähnt sei die Unterstützung durch die Mitarbeiter der
Datenverarbeitungszentrale des Kernforschungszentrums bei der Aus-
führung der Computer-Rechnungen. Für die sorgsame Durchführung der
Schreibarbeiten danke ich Frau A. Brunner.

Ich widme diese Arbeit meiner Frau.

1. Einleitung

1.1 Turbulenz

Turbulente Strömungsfelder [53,89,115,120] sind durch ihre unregelmäßige Struktur ausgezeichnet. Die Geschwindigkeit an einem Ort schwankt stark und unregelmäßig. Turbulenz ist ein Strömungszustand der sich in der Regel einstellt, wenn das Verhältnis der Trägheits- zu den Zähigkeitskräften innerhalb des Fluids, charakterisiert durch die Reynolds-Zahl, einen kritischen Wert überschreitet. Unterhalb dieser kritischen Reynolds-Zahl ergibt sich ein laminares Strömungsfeld. Bei großen Reynolds-Zahlen ist die Strömung instabil, d.h., zwei Strömungszustände, die sich um einen beliebig kleinen Betrag unterscheiden, divergieren im Verlauf der Zeit so weit, daß sie nach einiger Zeit so wenig gemeinsam haben, wie zwei random gewählte Strömungszustände. Diese Instabilität ist die Ursache für die Existenz turbulenter Strömungen. Wegen der großen Geschwindigkeitsschwankungen wird der Austausch von Impuls und skalaren Größen, wie Enthalpie und Mischungskomponenten gegenüber dem, bei laminarer Strömung allein wirksamen, molekularen Austausch stark vergrößert. Die quantitative Beschreibung turbulenter Strömungen ist daher für viele Bereiche von großem Interesse. Praktisch ist man hierzu jedoch weitgehend auf Experimente angewiesen. Dies gilt insbesondere bei komplizierten Geometrien, wie z.B. die Umströmung von lokalen Blockaden in Reaktor-Brennelementen [75], aber auch für Kanalströmungen [z.B. 88].

Die Ergebnisse derartiger Experimente hat man zunächst durch einfache Formeln approximiert, die die Interpolation innerhalb des Meßbereiches erlauben. Ein typisches Beispiel ist das Blasius-Gesetz [120] zur Darstellung der Abhängigkeit des Rohr-Reibbeiwertes von der Reynolds-Zahl. Durch stärkere Berücksichtigung der Grundgleichungen versucht man nun jedoch Turbulenzmodelle zu erstellen, mit denen die Extrapolation auf Bereiche, für die bisher keine Messungen vorliegen, möglich ist. Über derartige Turbulenzmodelle wird in Kap.2 berichtet. Dabei wird deutlich, daß auch diese Modelle eine intensive experimentelle Unterstützung benötigen.

Ein alter Traum der Strömungsforscher ist daher die theoretische Lösung der Navier-Stokes-Gleichung, deren Gültigkeit zur Beschreibung turbulenter Strömungen allgemein angenommen wird (vergl. Kap. 1.3). In voller Allgemeinheit ist dies bis heute unmöglich, vor allem wegen des großen Aufwandes, der zur Darstellung der instationären Strömungsfelder notwendig ist, die auch bei "eindimensionalen" Geometrien (z.B. Rohr) stets dreidimensionale Orts-Funktionen sind. Mit zunehmender Leistungsfähigkeit der elektronischen Rechenanlagen kann jedoch auch dieses Problem einer Lösung näher gebracht werden. So wurde zuerst von Deardorff [29] die turbulente Strömung zwischen zwei Platten simuliert. Die vorliegende Arbeit stellt eine Weiterentwicklung dieser Arbeit dar. Diese Weiterentwicklung betrifft folgende Bereiche:

- Verbesserung der theoretischen Grundlagen
- Simulation der Strömung außer im Platten- auch im Ringspaltkanal
- Anwendung der Verfahren zur Bestimmung von Turbulenzmodellkonstanten.

Neben der Strömung in geschlossenen Kanälen (wie z.B. im Reaktorbrennelement) interessiert die numerische Beschreibung turbulenter Strömungen insbesondere in der Meteorologie [64]. Viele Grundlagen wurden in diesem Zusammenhang erarbeitet. Die Anwendung numerischer Methoden zur Simulation turbulenter Strömungen dürfte im Rahmen der Kerntechnik insbesondere bezüglich der lokalen meteorologischen Vorgänge in der Umgebung von Kernkraftwerken zunehmend an Bedeutung gewinnen [129].

1.2 Geometrie, Randbedingung, Stoffwerte, Bezugsgrößen

In dieser Arbeit werden - in Anlehnung an die in der Reaktortechnik üblichen Fragestellungen - Kanalströmungen betrachtet. Wegen Ihrer Einfachheit, zur Reduzierung des numerischen Aufwandes und wegen der für Vergleiche vorliegenden experimentellen Ergebnisse werden der Ringspalt- und der Plattenkanal betrachtet. Gemäß Abb.1 ist der betrachtete Ringspalt axial "unendlich" ausgedehnt und durch den Abstand der Wände \hat{D} sowie das Verhältnis \hat{R}_2/\hat{R}_1 der Radien der äußeren und inneren Wände bestimmt. Der "unendlich" in zwei Richtungen ausgedehnte Plattenkanal ergibt sich hieraus durch den Grenzübergang

$$\hat{R}_2/\hat{R}_1 \rightarrow 1, \quad \hat{R}_2 - \hat{R}_1 = \hat{D} = \text{const}$$

Diese Geometrien lassen sich problemlos in den relativ einfachen kartesischen

$$\hat{\underline{x}} \equiv \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}_{\text{kart.}} \equiv \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}_{\text{kart.}}$$

bzw. zylindrischen Koordinaten

$$\hat{\underline{x}} \equiv \{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}_{\text{zyl.}} \equiv \{\hat{x}, \hat{\varphi}, \hat{r}\}_{\text{zyl.}}$$

mit $\hat{y} = \hat{r} \cdot \cos \hat{\varphi}; \quad \hat{z} = \hat{r} \cdot \sin \hat{\varphi}$

beschreiben. Bezüglich komplizierterer Geometrien siehe Kap. 11.2. Die betrachtete Strömung soll im allgemeinen eine im statistischen Sinne ^{*)} stationäre (turbulente) Strömung in der x-Richtung sein, die hervorgerufen wird durch erzeugene Konvektion infolge eines vorgegebenen Druckgradienten

$$\hat{p}_x = - \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \langle \hat{p} \rangle \quad (1-1)$$

bzw. einer entsprechenden axialen Feldkraft je Volumeneinheit.

Die mittlere Geschwindigkeit ist keine unabhängige Größe, sondern abhängig von \hat{p}_x . Als Bezugsgröße \hat{u}_0 für die Geschwindigkeit wird daher nicht die mittlere oder maximale Geschwindigkeit gewählt, sondern die aus den Druckgradienten ableitbare Geschwindigkeit

$$\hat{u}_0 \equiv \sqrt{\frac{\hat{p}_x \cdot \hat{D}}{2 \varrho}} \quad (1-2)$$

Aus einer Kräftebilanz ergibt sich die im Mittel an den Wänden wirkende Schubspannung $\langle \hat{\tau}_w \rangle$ zu

$$\langle \hat{\tau}_w \rangle = \frac{\hat{p}_x \cdot \hat{D}}{2} \quad (1-3)$$

und es gilt also auch

$$\hat{u}_0 = \sqrt{\frac{\langle \hat{\tau}_w \rangle}{\varrho}} \quad (1-4)$$

*) d.h. in zeitlich oder über Ensemble gebildeten Mittelwerten $\langle \rangle$

Man nennt diese Geschwindigkeit daher die "Schubspannungsgeschwindigkeit" [120, S.542].

Weitere dimensionsbehaftete Bezugsgrößen sind:

Formelzeichen	Bedeutung	Dimension(z.B.)
\hat{D}	Abstand der Wände	m
$\hat{t}_0 \equiv \hat{D}/\hat{u}_0$	charakteristische Zeit	s
$\hat{p}_0 \equiv \hat{p}_x \cdot \hat{D}$	Druck	$\frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}$
$\hat{\rho}_0$	spezifische Dichte	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$\hat{\nu}_0$	charakteristische kinematische molekulare Zähigkeit	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$

Das Fluid soll inkompressibel sein und die Dichte $\hat{\rho}$ zudem unabhängig von Ort und Zeit. Die mittlere Zähigkeit sei $\hat{\nu}_0$; die Zähigkeit $\hat{\nu}$ kann eine Funktion von Ort und Zeit sein. Als Randbedingung soll die Wandhaftbedingung

$$\hat{u}|_{\text{wand}} = 0 \quad (1-5)$$

gelten. Zudem soll das Strömungsfeld in axialer Richtung im statistischen Sinne konstant sein.

1.3 Grundgleichungen

Die Grundgleichungen sind die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls. Unter Verwendung der in Kap.1.2 definierten Bezugsgrößen lauten diese, auf Navier [86] und Stokes [117] zurückgehenden Gleichungen wie folgt [53]:

Voraussetzungen:

- inkompressibles Fluid
- konstante Dichte
- Newtonsches Fluid(d.h.lineares, isotropes Stoffgesetz)für die Schubspannung als Funktion der Deformationsgeschwindigkeiten, keine Momentenspannungen
- Fluid als Kontinuum beschreibbar
- keine Feldkräfte außer dem mittleren Druckgradienten \hat{p}_x
- Eulersche Betrachtungsweise

Kartesische Koordinaten:

Massenerhaltung (Kontinuitätsgleichung): $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad ^*) \quad (1-6)$

*) Es gilt die Summationskonvention, wonach über paarweise rechts unten geschriebene Indices [die nicht in Klammern stehen] von 1 bis 3 summiert wird.

- Impulserhaltung

$$\underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j)}_II = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i}}_III + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)}_IV + \underbrace{\delta_{ji} p_x}_V, \quad i=1,2,3 \quad (1-7)$$

Zylindrische Koordinaten:

- Massenerhaltung (Kontinuitätsgleichung)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0 \quad (1-8)$$

- Impulserhaltung

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial v_x}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (v_x^2)}_II + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\varphi v_x)}_III + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r v_x)}_IV &= - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_III + \underbrace{p_x}_V \\ + \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2v \frac{\partial v_x}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ v \left(\frac{\partial v_x}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ v r \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \right\} \right]}_IV; \\ \underbrace{\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (v_x v_\varphi)}_II + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\varphi^2)}_III + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r v_\varphi)}_IV + \underbrace{\frac{v_r v_\varphi}{r}}_V &= - \underbrace{\frac{\partial p}{r \partial \varphi}}_III \\ + \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ v \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ 2v \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ v r \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \right\} + \frac{v}{r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right\} \right]}_IV; \\ \underbrace{\frac{\partial v_r}{\partial t}}_I + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (v_x v_r)}_II + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\varphi v_r)}_III + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^2)}_IV - \underbrace{\frac{v_\varphi^2}{r}}_V &= - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial r}}_III \\ + \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ v \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ v \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ v r 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \right\} - \frac{2v}{r} \left\{ \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right\} \right]}_IV. \end{aligned} \quad (1-9)$$

Hierbei sind definiert

$$\underline{u} = \{u_1, u_2, u_3\}_{\text{kart.}} = \{v_x, v_\varphi, v_r\}_{\text{zyl.}} = \hat{u} / \hat{u}_0$$

$$\underline{x} = \{x_1, x_2, x_3\}_{\text{kart.}} = \{x, \varphi, r\}_{\text{zyl.}} = \hat{x} / \hat{b}$$

$$p = (\hat{p} / \hat{p}) / (\hat{p}_0 / \hat{p}_0)$$

$$t = \hat{t} / \hat{t}_0$$

$$P_x = (\hat{p}_x \cdot \hat{b}) / (\hat{p} \hat{u}_0^2) = 2$$

$$v = \frac{\hat{v}}{\hat{u}_0 \hat{b}} \equiv \frac{1}{Re}$$

Die Terme haben folgende Bedeutung:

I : lokale Beschleunigung

II : "Konvektionssterne", Differenz zwischen dem in ein differentielles Volumenelement ein- und ausströmenden Impuls.

III : Gradient der Druckschwankungen

IV : "Diffusionsterme", der durch molekularen Transport pro Volumeneinheit zugeführte Impuls (negativ, daher Impuls-Senke)

V : $P_x = 2$, mittlerer Druckgradient in x-Richtung bzw. Feldkraft je Volumeneinheit (orts- und in der Regel zeitunabhängig)(Impuls-Quelle)

Die Terme $\frac{v_r v_\theta}{r}$ und $-\frac{v_\theta^2}{r}$ in den Konvektionstermen der v_θ -bzw. v_r -Komponente werden als Coriolis- bzw. Zentrifugalbeschleunigung bezeichnet.

Für die Konvektions- und Diffusionsterme findet man gelegentlich andere Schreibweisen, die zuweilen vorteilhafter sein können; sie seien lediglich für kartesische Koordinaten angegeben:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (\text{wegen 1-6}) \quad (1-10)$$

Man nennt die linke Form die konservative, da ihr Integral über das gesamte Volumen verschwindet (vergl. Kap. A5.4).

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) = v \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial v}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1-11)$$

$$= v \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial v}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1-12)$$

(Bei der zweiten Gleichung treten im ersten Term lediglich gemischte Ableitungen auf; dies kann zu einfacher geschriebenen Randbedingungen führen.)

Zu beachten ist, daß $\frac{1}{\hat{v}}$ einer Reynolds-Zahl Re entspricht

$$Re = \hat{u}_0 \hat{\sigma} / \hat{\nu}, \quad (1-13)$$

die jedoch keine unabhängige Variable ist (vergl. Kap. 1.2). Die mit der mittleren Geschwindigkeit $\langle \hat{u} \rangle$ bzw. der maximalen Geschwindigkeit $\langle \hat{u} \rangle_{\max}$ gebildeten Reynolds-Zahlen Re_m bzw. Re_{\max} ergeben sich hieraus zu

$$Re_m = \frac{\langle \hat{u} \rangle}{\hat{u}_0} Re \frac{\hat{\nu}}{\hat{\nu}_0} \quad (1-14)$$

$$Re_{\max} = \frac{\langle \hat{u} \rangle_{\max}}{\hat{u}_0} Re \frac{\hat{\nu}}{\hat{\nu}_0}$$

Wenn im folgenden von Reynolds-Zahl gesprochen wird, so ist Re_m gemeint.

1.4 Abgeleitete Grundgleichungen

Aus den Erhaltungsgleichungen für Impuls und Masse und der Wandhaftbedingung lassen sich durch rein mathematische Operationen weitere Gleichungen ableiten. In dieser Arbeit werden derartige Gleichungen für die kinetische Energie je Masseneinheit $E = \frac{1}{2} u^2$ und den Druck je Masseneinheit p benötigt.

1.4.1 Erhaltungsgleichung der kinetischen Energie

Durch Bildung des Skalarproduktes eines Geschwindigkeitsvektors mit seiner partiellen zeitlichen Ableitung, wobei letztere durch die Impulserhaltungsgleichung gegeben ist, ergibt sich eine Erhaltungsgleichung für die kinetische Energie des Fluids:

kartesisch:
$$E \equiv \frac{1}{2} u_i^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u_j \frac{\partial E}{\partial x_j} = - \frac{\partial (u_i p)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left(\frac{\partial E}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i} \right) \right) + u_i p_x - \varepsilon \quad (1-15)$$

wobei

$$\varepsilon \equiv \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \nu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (1-16)$$

die Dissipation ist, d.h. die je Zeit- und Volumeneinheit durch die Arbeit der Zähigkeitskräfte in Wärme umgesetzte Energie. Während die Gleichung selbst keine neue physikalische Information enthält, folgt die Identifikation der Dissipation aus dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik [7, 53, 120]

Die entsprechende Gleichung lautet in zylindrischen Koordinaten mit $E \equiv \frac{1}{2} (u_x^2 + u_\varphi^2 + u_r^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x E) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\varphi E) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r E) &= v_x p_x \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \nu \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x^2) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_x v_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_x v_r) \right) \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \nu \left(\frac{\partial E}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x} (v_x v_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\varphi^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi v_r) \right) \right\} \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \nu \left(r \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} (v_r v_x) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_r v_\varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r^2) \right) \right\} - \varepsilon \end{aligned} \quad (1-17)$$

Die Dissipation ε ist hierbei gegeben durch:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \nu \left\{ 2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v_x}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right)^2 + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (1-18)$$

Als Wandbedingung gilt wegen (1-5)

$$E_{\text{Wand}} = 0$$

1.4.2 Bestimmungsgleichung für den Druck (Poisson-Gleichung)

Bildet man von dem durch die Impulserhaltungsgleichung (1-7,9) gegebenem Beschleunigungsvektor die Divergenz, so gilt wegen der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0 \quad \text{und also}$$

kartesisch:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = q_{\text{kart.}} \quad (1-19)$$

$$q_{\text{kart.}} = - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\} \quad (1-20)$$

bzw. in zylindrischen Koordinaten

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = q_{\text{zyl.}} \quad (1-21)$$

wobei q_{zyl} der $q_{\text{kart.}}$ entsprechende Ausdruck ist, dessen Details hier nicht benötigt werden.

Als Wandbedingung folgt aus (1-5) und (1-7)

$$\frac{\partial p}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \Big|_{\text{wand}} \quad (1-22)$$

Dies ist eine elliptische, partielle Differentialgleichung vom Typ einer Poisson-Gleichung mit Neumannscher (inhomogener) Randbedingung, die zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein muß. Diese Gleichung kennzeichnet die Bedeutung der Inkompressibilitätsbedingung und des Drucks, da sie bewirkt, daß eine Störung im Geschwindigkeitsfeld sich im Strömungsraum mit "unendlicher Schallgeschwindigkeit" ausbreitet.

1.5 Prinzipien der numerischen Simulation turbulenter Strömungen

1.5.1 Direkte bzw. Modellsimulation

Zur numerischen Simulation turbulenter Strömungen gibt es zwei prinzipiell verschiedene Arbeitsrichtungen.

Die eine Richtung (so auch diese Arbeit) befaßt sich mit der direkten Integration der Grundgleichungen gemäß Kap.1.3. Lediglich für gewisse Mängel, die aus der endlich großen Auflösung der hierbei anwendbaren Verfahren folgen, werden Modelle verwendet, die man als Feinstrukturmodelle oder Korrekturmodelle bezeichnen kann. Die begrenzte Auflösung ist stets durch die begrenzte Rechnerkapazität bedingt, wie im folgenden Kapitel erläutert wird. Die direkten Simulationsverfahren sind dadurch gekennzeichnet, daß die Bedeutung der in ihnen

enthaltenen Feinstrukturmodelle und die sonstigen Fehler gegen Null gehen, wenn bei Vorhandensein sehr leistungsfähiger Rechner die Auflösung gesteigert werden kann. Hierbei werden stets dreidimensionale, instationäre Strömungsfelder simuliert. Bei der zweiten Arbeitsrichtung werden zunächst die exakten Grundgleichungen durch Modellgleichungen approximiert, deren Modellcharakter auch dann nicht verschwindet, wenn die Auflösung beliebig gesteigert werden kann. Zumeist handelt es sich um Modellgleichungen zur Beschreibung zeitlich oder über Ensemble gemittelter [12] Strömungsfelder. Auf die Prinzipien und die Problematik derartiger Modelle wird in Kap.2 eingegangen.

Im folgenden wird ein Überblick über numerische Verfahren zur direkten Simulation gegeben. Da bisher lediglich von Deardorff [29,30,31,33] echte turbulente Strömungsfelder berechnet wurden, schließt dieser Überblick auch Verfahren zur Simulation laminarer Strömungen mit ein.

1.5.2 Methoden der numerischen Simulation

Die naheliegende Vorgehensweise, die in Kap.1.3 angegebenen Grundgleichungen direkt zu verwenden und durch Diskretisierung in ein für die rechnerische Simulation geeignetes Differenzenverfahren umzusetzen, ist weder die einzige noch die als erste benutzte. Neben dieser Simulation der sogenannten "primitiven Variablen", den Geschwindigkeitskomponenten u_i und dem Druck p , hat man zunächst mit einer Rotation-Potential-Form gearbeitet. In neuerer Zeit werden zudem die in Eigenfunktionen entwickelten Grundgleichungen nach der Galerkin-Methode verwendet. Eine Übersicht über die verschiedenen Methoden findet sich in [58, 43, 44]. Das Problem bei der Simulation der primitiven Variablen ist die Berücksichtigung der Inkompressibilitäts-Bedingung und damit des Druckes. Erstmals haben Harlow-Welch [54] diese Methode realisiert (allerdings nur für laminare Strömung und in zwei Dimensionen). Ausgehend von Anfangsbedingungen, die die Kontinuitätsgleichung erfüllen, wird der Druck zu jedem Zeitpunkt gemäß einer Differenzenform der Gleichung (1-19, 21) so bestimmt, daß die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeitskomponenten die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Die gleiche Methode wurde auch von Williams [141] und Deardorff [29] in drei Dimensionen verwendet, wobei hier jedoch jeweils noch eine Korrektur gem. Hirt-Harlow [56] eingeführt wird, die dazu führt, daß kleine Abweichungen der Anfangswerte von der Inkompressibilitäts-Bedingung sich nicht allmählich vergrößern. Eine Vereinfachung dieses Vorgehens wurde von Chorin [21] vorgeschlagen und z.B. von Amsden-Harlow [3] realisiert, indem nicht der Druck

selbst, sondern ein äquivalentes Hilfspotential γ berechnet wird, dessen Größe so bestimmt wird, daß die Inkompressibilitätsbedingung bei beliebigen Anfangswerten eingehalten wird; diese Methode wird auch in dieser Arbeit verwendet und in Kap. 2.2 genauer erläutert. Andere Arbeiten, in denen die primitiven Variablen integriert werden, sind z.B. [27,42,62,63,94].

Die Problematik des Druckes entfällt bei der Rotation-Potential-Form der Grundgleichungen. Hierzu wird von den Grundgleichungen die Rotation ω_i gebildet

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} ; i=1,2,3 \quad (1-23)$$

mit ε_{ijk} = 0 falls zwei Indices gleich sind
 = 1 falls die Indices in zyklischer Reihenfolge erscheinen
 = -1 falls die Indices in antizyklischer Reihenfolge erscheinen

Der Druck entfällt hierbei wegen

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 p}{\partial x_k \partial x_j} = 0 \quad (1-24)$$

Die Geschwindigkeiten werden aus einem Vektor-Potential ψ_j berechnet gemäß

$$u_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} ; i=1,2,3 , \quad (1-25)$$

so daß gilt $\partial u_i / \partial x_i = 0$.

Aus (1-23) und (1-25) ergibt sich die Bestimmungsgleichung des Vektor-Potentials zu

$$\omega_i = - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_k^2} ; i=1,2,3 \quad (1-26)$$

Anstelle der einen Poisson-Gleichung für den Druck sind in drei Dimensionen hier also drei Poisson-Gleichungen zu jedem Zeitschritt zu lösen. Zudem sind die Lösungen ψ_i und ω_i nicht so einfach zu interpretieren wie u_i, p ; was sich insbesondere bei Aufstellung geeigneter Randbedingungen bemerkbar macht. Diese von Aziz-Hellums [2] und Schönauer [121] für laminare Strömungen verwendete Methode wird daher in neuerer Zeit nicht empfohlen [44]. Anders ist dies für zweidimensionale Strömungen. Hier ist nur eine Komponente der Rotation von Null verschieden und also nur eine Poisson-Gleichung zu lösen. Hier hat sich die Methode vielfach bewährt [40,41,44,49,78,83], jedoch ist für die Simulation turbulenter Strömungen eine dreidimensionale Darstellung notwendig (siehe z.B. Kap. 1.2.2 sowie [81, 83]).

In den letzten Jahren wurde die Galerkin-Methode, insbesondere von Orszag [94,95,96,97] stark weiterentwickelt. Hierbei wird das Geschwindigkeitsfeld $u(\underline{x}, t)$ bezüglich des Ortes \underline{x} in Eigenfunktionen entwickelt, z.B.:

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \sum_{\underline{k}} \underline{v}(\underline{k}, t) \exp(\sqrt{-1} \underline{k} \cdot \underline{x}) \quad (1-27)$$

wobei nur eine endliche Zahl diskreter Wellenzahl-Vektor-Elemente \underline{k} numerisch berücksichtigt wird. Die Vorteile der Methode sind [96]:

- a) Ableitungen des Geschwindigkeitsfeldes können ohne Abbruchfehler bestimmt werden.
- b) Bei gleichem Speicheraufwand können in drei Dimensionen 8 (je Richtung 2) mal so viele Wellenzahlen-Komponenten simuliert werden, wie bei einem Differenzenverfahren, da in einem räumlich diskretisierten Maschennetz mit KM Maschen in einer Richtung maximal nur $\frac{KM}{2}$ Wellenzahlen darstellbar sind.
- c) Das Aliasing-Problem (vergl. Kap.A5.3) kann vermieden werden.

(Der Vorteil a) ist von minderer Bedeutung [33], vergl. Kap.A5.2.1)

Nachteile der Methode sind:

- a) Nichtlineare Terme, wie z.B. die Konvektionsterme oder nichtlineare Zähigkeiten können nur im realen Raum berechnet werden. Hierzu ist das Feld $\underline{v}(\underline{k},t)$ in das reale Feld $\underline{u}(\underline{x},t)$ zu transformieren, die nichtlinearen Terme zu berechnen und sodann wieder zurückzutransformieren. Diese Transformationen kosten sehr viel Rechenzeit, die erst durch die Schnelle Fourier-Transformation, FFT [19, 20] in erträglichen Grenzen gehalten werden konnte.
- b) Die Eigenfunktions-Entwicklung ist nur innerhalb einfacher Geometrien (Platte, Kugel, Zylinder) möglich [94,97]. Allerdings können eventuell kompliziertere Geometrien durch geeignete konforme Abbildungen in die handhabbaren einfacheren Geometrien abgebildet werden.
- c) Die Methode und zugehörigen Programme sind komplexer.

Diese Methode wird daher trotz ihrer prinzipiellen Eleganz bis jetzt noch nicht allgemein empfohlen [44, 95].

Schließlich wäre noch die Finite-Elemente-Methode (F.E.M.) zu erwähnen, deren Anwendung auf Strömungsprobleme z.B. von Crastan-Devos [24] gezeigt wurde. Crastan hat gezeigt, daß auch ohne Existenz eines Variations-Prinzips, das für die allgemeine Navier-Stokes-Gleichung bisher nicht gefunden wurde, die Anwendung der F.E.M. möglich ist. Der Vorteil der F.E.M. läge in der einfachen Beschreibung komplizierter Geometrien und Randbedingungen. Diese Methode führt jedoch zu großen Gleichungssystemen, die bei turbulenter Strömung stark nicht-linear wären. Die Finite-Elemente-Methode hat sich daher bisher lediglich bei linearen Strömungsproblemen bewährt.

In dieser Arbeit wird daher die zuerst genannte Methode der Simulation der "primitiven Variablen" verwendet.

1.5.3 Deardorffs Verfahren

Deardorff [28, 29] simuliert die instationäre, dreidimensionale turbulente Strömung zwischen zwei parallelen Platten. Er betrachtet einen Ausschnitt der Plattenströmung mit der Länge $X_1 = 3$ in Strömungsrichtung, $X_2 = 0.7$ in azimuthaler Richtung (senkrecht zur Strömungsrichtung, parallel zu den Platten) sowie den vollen Plattenquerschnitt in radialer Richtung (senkrecht zu den Platten) mit $D = 1$. Das Strömungsvolumen wird aufgeteilt in äquidistante Maschen mit den Kantenlängen

$$\Delta x = 3/24 = 0.125, \Delta y = 7/14 = 0.05, \Delta z = 1/20 = 0.05 \quad (1-28)$$

also in $24 \cdot 14 \cdot 20 = 6720$ Maschen.

Die Feinstruktur der Turbulenz (vergl. Kap. 5.1) wird durch Modelle berücksichtigt, wie sie von Lilly [80, 81, 32] entwickelt wurden. Die Übereinstimmung der gemittelten Ergebnisse mit den Messungen von Laufer [76, 77] ist mittelmäßig. Beispielsweise weicht das mittlere Geschwindigkeitsprofil um bis zu 50% von den Meßwerten ab. Die Übereinstimmung mit den Messungen von Comte-Bellot [18] bei höheren Reynolds-Zahlen ist geringfügig besser. Diese Fehler können zum Teil auf die wohl zu geringe Maschen-Anzahl, zum Teil aber auch auf Fehler im Feinstrukturmodell und den Randbedingungen zurückgeführt werden, wie in dieser Arbeit gezeigt wird. Deardorffs-Feinstrukturmodell ist angenommen nur, entgegen (1-28), für gleichseitige Maschen geeignet; die Übertragung des Feinstrukturmodells auf zylindrische Koordinaten ist nicht möglich.

Die Auswertung der Ergebnisse ergab insbesondere Aussagen über die Struktur der Strömung. So konnte z.B. festgestellt werden, daß die "Turbulenzballen" je nach Geschwindigkeitskomponente in axialer Richtung unterschiedlich ausgedehnt sind. In folgenden Arbeiten [27, 30, 33] wurde zusätzlich das Temperaturfeld als passive Größe mitintegriert und damit - unter geeigneten Randbedingungen - die Stabilität der atmosphärischen Strömung untersucht. Das Maschen-netz bestand hierbei maximal aus $40 \cdot 40 \cdot 20$ Maschen. Auswertungen mit dem Ziel der Überprüfung oder Verbesserung von Turbulenzmodellen, wie in dieser Arbeit, wurden nicht vorgenommen.

Das wichtigste Ergebnis der Deardorff'schen Arbeiten ist der Beweis, daß die direkte numerische Simulation turbulenter Strömungen bei hohen Reynolds'schen Zahlen möglich ist und hierbei ein Feinstrukturmodell, das unabhängig von spezifischer experimenteller Unterstützung ist, anwendbar ist.

1.6 Auflösungsvermögen und Notwendigkeit von Feinstrukturmodellen

1.6.1 Physikalisch geforderte Auflösung zur direkten Simulation turbulenter Strömungen

Bis vor wenigen Jahren wurde prinzipiell bezweifelt, daß eine direkte numerische Simulation turbulenter Strömungen möglich ist [23,35,121]. Die Anforderungen, die an eine vollständige numerische Simulation zu stellen sind, ergeben sich aus folgenden Überlegungen:

Emmons [35] schätzt, daß zur Beschreibung der Feinstruktur einer turbulenten Rohrströmung bei einer Reynolds-Zahl von ca. 5000 etwa 10^{10} Maschen betrachtet werden müssen und die Rechenzeit hierzu auf modernen Rechenanlagen 100 Jahre betragen würden. Hierbei wird die Größenordnung der noch aufzulösenden Längen abgeleitet aus der Höhe der Wandrauhigkeit, die eine Änderung des Druckverlustes um 10% gegenüber dem bei glatten Wänden bewirkt. Der angegebene Aufwand wächst zudem mit steigender Reynolds-Zahl.

Eine ähnliche Abschätzung ist die folgende: Von einer vollständigen direkten Simulation muß man fordern, daß sie zumindest die laminare Unterschicht erfaßt. Ein Maß der hierzu erforderlichen Maschenkantenlängen Δz ist also die Dicke der laminaren Unterschicht. Hierfür wird allgemein angegeben [120, S.553]

$$\Delta z = 5 \frac{\nu}{u_o} \quad (1-29)$$

Aufgrund der Definition von \hat{u}_o und der des Widerstandskoeffizienten λ

$$\lambda \equiv \frac{2 \langle -(\partial \hat{p} / \partial \hat{x}) \rangle \delta}{\bar{\rho} \langle \hat{u} \rangle^2} \quad (1-30)$$

folgt

$$\hat{u}_o = \left(\frac{1}{\delta} \lambda \langle \hat{u} \rangle^2 \right)^{1/2} \quad (1-31)$$

und also

$$\Delta z = \frac{5 \cdot \sqrt{\delta}}{\sqrt{\lambda} Re_m} \quad (1-32)$$

Setzt man für λ das für Rohre bei nicht zu großen Reynolds-Zahlen gültige Blasius'sche Widerstandsgesetz [120, S.553]

$$\lambda = 0.3164 Re_m^{-1/4} \quad (1-33)$$

ein, so folgt

$$\Delta z \approx 25 Re_m^{-7/8} \quad (1-34)$$

und also z.B. für $Re = 10^5$ gemäß Abb.2

$$\Delta z \approx 10^{-3}$$

Folglich wären in radialer Richtung $KM \approx 10^3$ Maschen bzw. 10^9 Maschen in drei Dimensionen notwendig.

Wenn man nun jedoch für die Wandschicht ein spezielles "Wandgesetz"-Modell verwendet, so wäre interessant, mit welcher Auflösung Δz man in der turbulenten Kernströmung rechnen müßte. Ein Maß für die erforderliche Länge ist hier die Kolmogorov-Länge η , wie sie in Kap 1.2 begründet wird und die für lokalisotrope Turbulenz diejenigen Turbulenzballen-Durchmesser kennzeichnet, bei denen die Trägheits- und Zähigkeitskräfte im gleichen Maße zum Zerfall des Ballens beitragen:

$$\eta = (\nu^3 / \langle \epsilon \rangle)^{1/4} \quad (1-35)$$

Mittelt man die Energieerhaltungsgleichung (1-15) über das gesamte Strömungsvolumen, so ergibt sich

$$\nu \langle \epsilon \rangle = \frac{\nu \langle \bar{u}^2 \rangle}{\delta} (-\langle \partial \bar{p} / \partial x \rangle) \approx \langle \epsilon \rangle \quad (1-36)$$

Wegen $\langle \partial \bar{p} / \partial x \rangle = 2 \bar{\tau} \bar{u}_0^2 / \delta$ folgt dann mit

$$\Delta z = \frac{\eta}{\delta} = \left(\frac{\nu}{\lambda Re_m^2} \right)^{1/4} \quad (1-37)$$

und mit (1-33)

$$\Delta z = 1.9 Re_m^{-11/16} \quad (1-38)$$

Für $Re = 10^5$ wäre ebenfalls gem. Abb.2

$$\Delta z \approx 10^{-3}$$

Man erhält hiernach also interessanterweise etwa das gleiche Ergebnis.

Man wird erwarten, daß derartige viele Maschen mit einem modernen Rechner nicht bearbeitbar sind. Dies soll der folgende Abschnitt deutlich machen.

1.6.2 Erreichbare Auflösung und Schlußfolgerung

Wenn KM die Anzahl der Maschen in einer Richtung ist, so wächst der erforderliche Speicheraufwand bei isotroper Auflösung mit KM^3 . Bedenkt man, daß pro Masche bei dem hier verwendeten Verfahren etwa 9 Variablenwerte (3 Geschwindigkeitskomponenten und je ein Energie- und Divergenzwert zu drei verschiedenen Zeitpunkten, also 15, durch geeignete Programmierung zu einer Zeit jedoch nur 9) zu speichern sind, so ergibt sich der benötigte Speicherplatz bei 4 Bytes je Wert entsprechend Abb.3. Der auf der IBM 370/165 in Karlsruhe für den Benutzer verfügbare Kernspeicher beträgt gegenwärtig maximal 2000 K Byte ($1K=1024$),

so daß im Kernspeicher maximal Probleme mit $KM \approx 40$ berechnet werden können; wird durch eine geeignete dynamische Datenverwaltung dafür gesorgt, daß zu einer Zeit nur ein Wert je Maschenpunkt im Kernspeicher und der Rest auf Hintergrundspeichern zu liegen kommt, so sind Probleme mit bis zu $KM \approx 80$ bearbeitbar.

Noch einschränkender ist jedoch der Rechenzeitaufwand. Zur Simulation einer dimensionslosen Zeiteinheit ist eine Rechenzeit erforderlich, die proportional KM^4 steigt, da der zulässige Zeitschritt proportional zu KM^{-1} variiert (vergl. Kap. 6.3.2). Für ein Maschennetz von $16 \times 16 \times 16$ Maschen wird für einem Zeitschritt $\Delta t \approx 5 \cdot 10^{-3}$ auf der IBM 370/165 etwa eine Rechenzeit von 3 Sekunden benötigt, pro dimensionsloser Zeiteinheit also etwa 10 Min. Damit ergibt sich die Rechenzeit als Funktion von KM gemäß Abb. 4. Für die Erreichung einer statistisch stationären Lösung sind 2÷3 dimensionslose Zeiteinheiten notwendig. Dieser Erfahrungswert [33] wird bestätigt, wenn man als "Einlaufzeit" T_e diejenige Zeit betrachtet, in der in einem Rohr die Einlauflänge durchströmt wird, also

$$T_e = \frac{L_e}{\langle u \rangle} \quad (1-39)$$

Gemäß Latzko [48, S. 233] gilt für Rohre

$$L_e = 0.693 (Re_m)^{1/4} \quad (1-40)$$

mit $\langle u \rangle \approx 30$ (als Größenordnung [18])

$$\text{also } T_e \approx 0.023 Re_m^{1/4} \quad (1-41)$$

Für $Re_m \approx 10^8$ ergibt sich $T_e \approx 2.3$

Nimmt man Rechenzeiten von ca. 10h als tragbar an, so folgt damit eine maximal verwendbare Maschenzahl von $KM \approx 40$. Dies dürfte die heute erreichbare Größenordnung der oberen Grenze sein.

Mehr als Fußnote sei bemerkt, daß die gem. Kap. 1.6.1 erforderlichen Maschenzahlen von $KM \approx 1000$ in einer Richtung vielleicht in 20 bis 30 Jahren mit vertretbarem Aufwand realisiert werden können, wenn die in den letzten 20 Jahren feststellbare Entwicklung der Rechnerleistungen extrapoliert werden darf, wonach sich die Rechnergeschwindigkeit etwa alle 6 und die Kernspeicherkapazität etwa alle 5 Jahre verzehnfacht [71]. Selbstverständlich ist die exponentielle Extrapolation mit Vorbehalt zu betrachten.

Als Ergebnis halten wir also fest: Zur vollständigen direkten Simulation turbulenter Strömungen ist schon bei mäßigen Reynolds'schen Zahlen ($Re_m \approx 10^5$) ein Maschennetz mit ca. $(1000)^3$ Maschen erforderlich. Aufgrund der heutigen Rechenkapazität sind jedoch lediglich Maschennetze der Größenordnung $(40)^3$ realisierbar, d.h. die erreichbare Auflösung ist nicht ausreichend, um die Struktur der Turbulenz mit charakteristischen Längen kleiner als $\frac{1}{40}$ aufzulösen. Für diese "Feinstruktur" sind daher besondere Modelle notwendig.

1.7 Zieldefinition dieser Arbeit

Pauschal gesehen ist es das Ziel dieser Arbeit, Verfahren zur direkten numerischen Simulation turbulenter Strömungen bei hohen Reynolds-Zahlen weiter bzw. neu zu entwickeln. Die Ergebnisse der numerischen Simulation sollen dazu verwendet werden:

- a) das Verständnis der Vorgänge in turbulenten Strömungen zu verbessern,
- b) Turbulenzcharakteristika zu ermitteln, die nicht gemessen werden können,
- c) die Gültigkeit von Turbulenzmodellen für zeitlich oder über Ensemble gemittelte Strömungsfelder zu überprüfen, empirisch bestimmte Größen zu ermitteln und gegebenenfalls Verbesserungen zu begründen.

Es wird also nicht daran gedacht, direkte Simulationsverfahren für praktische Auslegungsprobleme der Technik zu entwickeln, sondern die hier einzig praktikabel anwendbaren Turbulenzmodelle zu unterstützen.

Besondere Beachtung bedarf hierbei das Feinstrukturmodell. Dies soll unabhängig von einer nur der betrachteten Geometrie gemäßen experimentellen Unterstützung sein und auch bei variablen Maschengrößen gültig sein.

2. Über statistische Turbulenzmodelle

In diesem Kapitel wird im einzelnen erläutert, was Turbulenzmodelle sind, wo ihre Problematik liegt und wie hier die direkte numerische Simulation turbulenter Strömungsfelder hilfreich sein kann. Besonders wird die Frage der "universellen" Gültigkeit von Turbulenzmodellen diskutiert. Die dargestellten Turbulenzmodelle selbst sind dabei nicht neu. Jedoch dürfte die Darstellung für das Verständnis turbulenter Strömungen hilfreich sein. Zudem werden hier die in der Auswertung bestimmten Turbulenzmodell-Größen definiert.

2.1 Notwendigkeit von Turbulenzmodellen und Ziel der Modelltheorien

Turbulenz ist ein Zufalls -Prozeß [89]. Man will und kann nicht alle Details dieses Prozesses beschreiben. In der Regel interessiert man sich lediglich für gewisse statistische Mittelwerte, wie z.B. die von Geschwindigkeitswerten, Drucken oder Produkten von solchen. Es liegt daher nahe, nicht den Umweg über die Lösung der instationären Differentialgleichungen zu wählen, um sodann die Lösung zu mitteln, sondern sogleich die Differentialgleichungen zu mitteln. Bildet man jedoch von den Impulserhaltungsgleichungen (1-7) den zeitlichen Mittelwert (gekennzeichnet durch $\langle \rangle$), so ergeben sich Gleichungen, die mehr Unbekannte enthalten als die Anzahl der Gleichungen beträgt:

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i \cdot u_j \rangle = - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle p \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \langle u_i' u_j' \rangle \right) \quad (2-1)$$

Zusätzliche Unbekannte sind hierbei die nach Reynolds [107] benannten Korrelationen

$$\langle u_i' u_j' \rangle \equiv \langle (u_i - \langle u_i \rangle) \cdot (u_j - \langle u_j \rangle) \rangle, \quad (2-2)$$

die von der Dimension einer Spannung je Masseneinheit sind und daher Reynolds-Spannungen genannt werden. Man kann nun zwar für diese Unbekannten in bekannter Weise [12,115] ebenfalls Differentialgleichungen aufstellen, diese enthalten dann aber als neue Unbekannte eine große Zahl von Tripelkorrelationen der Art $\langle u_i' u_j' u_k' \rangle$ bzw. $\langle u_i' p' \rangle$ usw.. Auf diesem Wege gelangt man also bei endlich vielen Gleichungen nicht zu ebensovielen Gleichungen wie Unbekannten. Man muß irgendwo abbrechen und die bis dahin unbestimmten Unbekannten über geeignete Näherungen aus den bekannten Größen berechnen. Man spricht hier von dem "Schließungsproblem". Der durch die Näherungen entstehende Satz von Gleichung wird als Turbulenz-Modell bezeichnet.

Im folgenden werden einige Turbulenz-Modelle beispielhaft für die große Zahl existierender Vorschläge, die es zu diesem Gebiet gibt, dargestellt; Über -sichten finden sich z.B. in [53,59,91,115,127]. Bei der formelmäßigen Darstellung beschränken wir uns wegen der kurzen Schreibweise auf eindimensionale, kartesische Probleme mit x als der Achse in Strömungsrichtung und z der dazu senkrechten, gemessen von einer begrenzenden Wand, wo gilt $\langle u \rangle = \langle u_1 \rangle(z)$. Das allgemeine Ziel der Turbulenztheoretiker ist es, ein "universelles" Turbulenzmodell zu finden, daß

- einerseits in möglichst vielen Fällen (d.h.bei den verschiedensten Geometrien, Randbedingungen, Arten der Turbulenzerzeugung usw.) ohne Veränderung des

Modells oder irgendwelcher Modellkonstanten gültig ist und also eine Extrapolation auf Neuland ohne neue Experimente erlaubt,

- andererseits aber noch so einfach ist, daß es mit vertretbarem Aufwand praktisch angewendet werden kann.

Die Existenz eines derartigen "universellen" Turbulenzmodells wird im Zusammenhang mit einigen speziellen Modellen im folgenden diskutiert.

2.2 Das Prandtl'sche Mischungswegmodell

In eindimensionalen Strömungen gemäß obiger Festlegung ist nur eine Komponente der Reynolds-Spannungen von Null verschieden; es sei dies

$$\langle u'_1 u'_3 \rangle \equiv \langle u' w' \rangle \quad (2-3)$$

w' ist die Schwankungskomponente senkrecht zur Wand (Abb.1). Das einfachste Modell hierfür ist das Prandtl'sche Mischungswegmodell [98]. Unter Verwendung eines Boussinesq -Ansatzes [5], bei dem in Analogie zum Newtonschen Spannungsgesetz für die molekularen Spannungen gesetzt wird

$$\langle u' w' \rangle = - \nu_{turb} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z}, \quad (2-4)$$

bestimmt Prandtl die scheinbare turbulente Zähigkeit ν_{turb} aufgrund der Vorstellung von der Bewegung einzelner Turbulenzballen (in Analogie zur kinetischen Gastheorie) über eine freie Weglänge L hinweg (dem "Mischungsweg") zu

$$\nu_{turb} = L^2 \left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \right|. \quad (2-5)$$

Die Bestimmung des Mischungsweg L ist problematisch. In Wandnähe findet man [120]

$$L = k \cdot z \quad (2-6)$$

mit der Kármán-Konstanten $k \approx 0.4$ und in größerer Entfernung von der Wand

$$L \approx 0.1 \cdot D, \quad (2-7)$$

wobei D eine charakteristische geometrische Länge ist. Eine Formel für L , die die Berechnung von $\langle u' w' \rangle$ auch bis in die laminare Unterschicht erlaubt, wurde von van Driest [25] angegeben und von Pantankar-Spalding auf variable Schubspannung [104] verallgemeinert:

$$L = k z \left[1 - \exp \left\{ -z \cdot Re \tau^{1/2} / A_w \right\} \right] \quad (2-8)$$

Die Konstante A_w berücksichtigt die Wandrauigkeit, τ ist die dimensionslose Schubspannung am Ort z , die sich in Plattenströmungen aus einer Kräftebilanz ermitteln läßt.

Das Prandtl'sche Mischungswegmodell hat sich in vielen Fällen, insbesondere bei Grenzschichtströmungen gut bewährt. Siehe hierzu z.B. [104]. Zu falschen Ergebnissen gelangt man nach diesem Modell jedoch in folgenden Fällen:

- a) In der Mitte einer Kanalströmung führt (2-4) zu Widersprüchen, wenn infolge asymmetrischer Geometrie (z.B. Ringspalt) oder unterschiedlicher Wandrauhigkeiten der Ort verschwindender Schubspannung $\langle u'w' \rangle = 0$ ungleich dem Ort maximaler Geschwindigkeit ($\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} = 0$) ist [90].
- b) Gl. (2-5) kann zu großen Fehlern führen, wenn (wie häufig üblich [49, 104]) die turbulenten Austauschkoefizienten für skalare Größen, wie Temperatur oder Konzentration, proportional zu v_{turb} gesetzt werden.
- c) Bei instationären oder durch langsam variierende Kanalquerschnitte substantiell beschleunigten Strömungen gilt die Proportionalität zwischen v_{turb} und $\left| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \right|$ nur mit zeitlicher Verzögerung.
- d) Bei komplizierten Kanalquerschnitten ist die geeignete Bestimmung der Länge L problematisch; zudem haben die realen Austauschkoefizienten dort einen anisotropen Charakter; vergleiche hierzu [8].
- e) Bei rezirkulierenden Strömungen [49], wie hinter Rippen oder Blockaden [75] versagt der Ansatz vollständig.
- f) Bei Sekundärströmungen und anderen konvektiven Mischeffekten versagt das Modell ebenfalls weitgehend.

Hieraus ziehen die einen den Schluß, daß es ein universell gültiges Turbulenzmodell überhaupt nicht geben kann. Die Mehrzahl der auf diesem Gebiet Tätigen versucht jedoch unter Berücksichtigung weiterer Größen und Approximation der hierfür gültigen, aus den Grundgleichungen ableitbaren, exakten Gleichungen, den Gültigkeitsbereich der Turbulenzmodelle zu erweitern.

Tatsächlich wird es wohl ein universell gültiges Modell nicht geben - es sei denn, man verwendet die Navier-Stokes-Gleichungen selber. Jedoch, so wie das Prandtl'sche Modell wenigstens in einfacher Kanalströmung oft als hinreichend allgemeingültig angesehen werden kann, so kann man hoffen, daß ein Modell, das etwas mehr Information aus den exakten Gleichungen übernimmt, wesentlich "universellere" Gültigkeit besitzt.

2.3 Energie-Modell nach Prandtl

Ein erstes, derartiges verbessertes Turbulenzmodell wurde ebenfalls von Prandtl vorgeschlagen [99]. Hierbei wird gesetzt:

$$\langle u'w' \rangle = -\alpha_1 \sqrt{\langle \epsilon' \rangle} L \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \quad (2-9)$$

Für die hierbei benötigte zeitlich gemittelte kinetische Energie $\langle \epsilon' \rangle \equiv \frac{1}{2} \langle (u_i - \langle u_i \rangle)^2 \rangle$ der Schwankungsgeschwindigkeiten gilt exakt die durch zeitliche Mittellung aus (1-15) ableitbare Gleichung (mit $v = \text{const}$)

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left[v \frac{\partial \langle \epsilon' \rangle}{\partial z} - \langle w' \epsilon' \rangle - \langle w' p' \rangle \right]}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\langle u'w' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z}}_{\text{Produktion}} - \underbrace{v \left\langle \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle}_{\text{Dissipation}} \quad (2-10)$$

Durch Dimensionsanalyse oder mittels einfacher Modellvorstellungen, ähnlich der des Mischungswegmodells, kann man für die unterstrichenen unbekannten Korrelationen Näherungen einführen und somit folgende Modellgleichung erhalten [115]:

$$0 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left[v \frac{\partial \langle \epsilon' \rangle}{\partial z} - \alpha_3 \sqrt{\langle \epsilon' \rangle} L \frac{\partial \langle \epsilon' \rangle}{\partial z} \right]}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\langle u'w' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z}}_{\text{Produktion}} - \underbrace{\alpha_2 \frac{\langle \epsilon' \rangle^{3/2}}{L}}_{\text{Dissipation}} \quad (2-11)$$

Das aus den Gleichungen (2-6), (2-9) und (2-11) bestehende Modell enthält neben der Karman-Konstanten k drei experimentell zu bestimmende Konstanten a_1, a_2, a_3 (vergl. Kap. 2.6).

Dieses Modell ist insbesondere dort von Vorteil, wo das Prandtl'sche Mischungswegmodell aufgrund der in Kap.2.2 unter b) und c) genannten Fälle versagt. Nach wie vor ist die Berechnung des Längenmaßstabes L , der in erster Näherung wie in Kap.2.2 bestimmt wird, problematisch. Daß dies insbesondere bei rezirkulierenden Strömungen ein entscheidender Mangel ist, zeigt deutlich die Arbeit von Runchal-Spalding [116]. Diese Autoren haben obiges Modell verwendet, um das Strömungsfeld (und daraus das Temperaturfeld) nach einer plötzlichen Rohrerweiterung zu berechnen. Die berechneten Stromlinien machen einen überzeugenden Eindruck. Wenn man jedoch liest, daß das Feld der Längenwerte L durch komplizierte algebraische Gleichungen mit vier empirischen Konstanten so ermittelt wurde, daß das Geschwindigkeitsfeld gerade mit entsprechenden Messungen übereinstimmt, so ist dies enttäuschend. Die durchgeführten Rechnungen sind insofern nur bezüglich der Berechnung des Temperaturfeldes von Wert. Daraus folgt, daß man auch für die Länge L nach Modellen suchen muß, die sich aus geeigneten Approximationen exakter Gleichungen ergeben.

2.4 Längen-Modelle nach Rotta

Wie oben für ein Beispiel erläutert, ist für Turbulenz-Modelle die Kenntnis der für die turbulenten Austauschvorgänge charakteristischen Länge L notwendig. Diese Aussage ist für Turbulenz überhaupt typisch. Inkompressible Strömungen sind dadurch gekennzeichnet, daß Störungen an einem Ort durch die Wirkung des Druckfeldes (vergl. Kap. 1.4.2) auf das gesamte Strömungsfeld übertragen werden. Dies wird deutlich, wenn man die allgemeine Lösung der für den Druck gültigen Poisson-Gleichung (1-19) betrachtet [134] (für $v = \text{const}$):

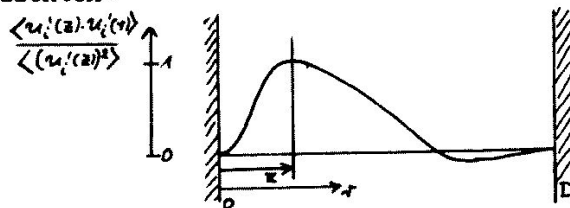
$$p(x) = \iiint_V \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (u_i u_j)(x') \frac{dV(x')}{|x' - x|} \quad (2-12)$$

Turbulenz-Größen, die die räumliche Struktur der Strömung berücksichtigen lassen, sind neben Längenmaßstäben auch Aussagen über Korrelationen zwischen Variablen an verschiedenen Punkten im Ort-Zeit-Raum [53, 115] sowie Korrelationsspektren an einem Ort als Funktion der zeitlichen Frequenz f oder des dreidimensionalen Wellenzahlenvektors k [132, 53, 116] (vergl. Kap. 4.2.2) sowie daraus abgeleitete Größen, wie z.B. eine mittlere Frequenz [68, 127].

Um für eine Länge L eine Modell-Gleichung erstellen zu können, muß zuvor diese Länge L geeignet mathematisch definiert werden. Die Vorstellung eines Mischungsweges ist allein nicht ausreichend, um dafür aus den exakten Gleichungen eine Aussage abzuleiten. Für eindimensionale Strömungen hat Rotta [108, 115] folgende Definition vorgeschlagen:

$$L(z) \equiv \frac{3}{8} \int_0^D \frac{\langle u'_i(z) u'_i(r) \rangle}{\frac{1}{2} \langle (u'_i(z))^2 \rangle} dr \quad (2-13)$$

Gemäß folgender Skizze ist diese Länge also das Integral des Korrelationskoeffizienten:



(Der negative Verlauf für $r \gg z$ ist eine Konsequenz der Kontinuitätsgleichung). Das so definierte L kann als der mittlere Durchmesser von Turbulenzballen interpretiert werden. Bildet man von obigem Integral die zeitliche Ableitung und setzt für $\frac{\partial u'_i}{\partial t}$ die Impulserhaltungsgleichungen ein, so erhält man eine Bestimmungsgleichung für L [109, 114, 115]. Die folgende Gleichungsdarstellung enthält oben die exakte Gleichung und unten die von Rotta [114, 115] vorgeschlagene Näherung.

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{3}{16} \left\{ \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \int_0^D \langle w'(z) u'(\tau) \rangle d\tau + \int_0^D \frac{\partial \langle u(\tau) \rangle}{\partial \tau} \langle u'(z) w'(\tau) \rangle d\tau \right\} \\
 0 &= -\langle u'w' \rangle \left(\alpha_4 L \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} + \alpha_5 L^3 \frac{\partial^3 \langle u \rangle}{\partial z^3} \right) \\
 &\quad + \frac{3}{16} \int_0^D \frac{\partial}{\partial \tau_k} \langle u'_i(z) u'_k(z) u'_i(\tau) \rangle d\tau + \nu \frac{3}{8} \int_0^D \frac{\partial^2 \langle u'_i(z) u'_i(\tau) \rangle}{\partial \tau_k^2} d\tau \\
 &\quad - \alpha_2 \cdot \alpha_6 \langle E' \rangle^{\frac{3}{2}} \quad (2-14)
 \end{aligned}$$

Senke

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{3}{16} \int_0^D [\langle u'_i(z) w'(z) u'_i(\tau) \rangle + \langle p'(z) w'(\tau) \rangle + \langle p'(\tau) w'(z) \rangle] d\tau - \nu \frac{\partial}{\partial z} (\langle E' \rangle L) \right\} \\
 & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \alpha_7 \langle E' \rangle^{\frac{4}{3}} L \left[L \frac{\partial \langle E' \rangle}{\partial z} + \alpha_8 \langle E' \rangle \frac{\partial L}{\partial z} \right] + \nu \frac{\partial}{\partial z} (\langle E' \rangle \cdot L) \right\} \\
 & \text{Diffusion}
 \end{aligned}$$

Zu den Näherungsgleichungen gelangt man teils durch Dimensionsanalysen (insbesondere beim Senken-Term und den Druck-Geschwindigkeits-Korrelationen), teils analytisch; so wird die Näherung des Produktionsterms begründet als eine Taylor-Reihen-Entwicklung der Integrale; hier sind also auch noch weitere Terme mit $L^n \frac{\partial^n \langle u \rangle}{\partial z^n}$, $n=5,7,\dots$ denkbar. Bisher wurde hierbei jedoch stets nur der erste Term berücksichtigt ($\alpha_5 \equiv 0$), wie noch berichtet wird. Zusammen mit den Gleichungen (2-9), (2-11) ist dies also ein Modell, das die Berechnung von $\langle u \rangle$, $\langle E' \rangle$, und L aufgrund von sogenannten Transportgleichungen und $\langle u'w' \rangle$ aufgrund einer algebraischen Beziehung hieraus zu berechnen erlaubt. Numerische Verfahren zur Lösung dieser und ähnlicher Gleichungen werden in [49, 104] angegeben. Dieses Modell enthält 8 Konstanten a_i . Bei Verwendung einer zusätzlichen Transportgleichung für $\langle u'w' \rangle$ gemäß Rotta [114] benötigt man 13 Konstanten. Die geeignete Bestimmung dieser Konstanten ist das Hauptproblem der Turbulenz-Modell-Theorie.

2.5 Methoden zur Bestimmung der Modell-Konstanten

Zur Bestimmung der Konstanten, z.B. a_1 bis a_8 , beschreitet man prinzipiell drei Wege:

- Betrachtung von Grenzfällen, in denen viele Terme vernachlässigt werden können, wie die unmittelbare Wandnähe (wo das Prandtl'sche Mischungsweg-

modell gilt) oder homogene Turbulenz (wo z.B. alle Terme der Transportgleichung für L verschwinden).

- b) Integration der Differentialgleichung mit gewählten Konstantenwerten und Variation der Konstanten, so daß die integralen Ergebnisse mit möglichst vielen entsprechenden experimentellen Ergebnissen ("Zielwerten") im Sinne eines least square fit übereinstimmen.
- c) Direkte Bestimmung der Konstanten durch Messung der in ihren Definitionsgleichungen auftretenden Terme; z.B.

$$\alpha_2 \equiv \frac{\nu \langle (\partial u_i' / \partial x_j)^2 \rangle}{\langle \epsilon' \rangle^{3/2} / L} \quad (2-15)$$

Der Weg a) erlaubt die Bestimmung nur einiger weniger Konstanten. Den Weg b) haben beispielsweise Ng-Spalding [91] verfolgt und dabei für Plattenströmung, Rohrströmung, Platten-Grenzschichtströmung und Freistrahelströmung als Zielwerte integrale Meßwerte benutzt, wie z.B.

$$(\langle u \rangle_{max} - \frac{1}{2} \langle u \rangle)$$

für Platten- und Rohrströmung.

Der Weg c) wäre der exakteste. Hierbei könnte auch überprüft werden, ob die "Konstanten" tatsächlich unabhängig von Ort und Strömungsgeometrie sind, ob das Modell also universell gültig ist. Hier versagt jedoch die Meßtechnik in fast allen Fällen. Die Messung der komplizierten Korrelationen von Geschwindigkeitsableitungen, Drücken oder deren Integrale über den Raum ist nahezu unmöglich. Eine Ausnahme bildet vielleicht die Energiedissipation, wie sie in (2-15) benötigt wird. Die Messung der räumlichen Ableitungen wird hier zu meist durch Messung zeitlicher Ableitungen und Umrechnung gemäß der Taylorschen Hypothese [134]

$$x \approx \langle u \rangle \cdot t \quad (2-16)$$

(zu deren Problematik vergleiche [115, S.148]) und Annahme von Lokalisotropie (siehe Kap.4) ersetzt.

Es ist daher eines der Ziele dieser Arbeit, nach numerischer Simulation orts- und zeitabhängiger Strömungsfelder die in den Definitionsgleichungen auftretenden Terme numerisch zu ermitteln, um so die Konstanten zu bestimmen.

2.6 Angaben für die Konstantenwerte, den Einfluß der Unsicherheiten der
Konstanten sowie deren numerische Bestimmbarkeit

In Tabelle 1 sind die von verschiedenen Autoren angegebenen Konstantenwerte wiedergegeben. Der Vergleich wird etwas durch die unterschiedlichen Definitionen der Länge L erschwert, was sich gem.(2-9) insbesondere in dem Wert der Konstanten a_1 ausdrückt. Erkennbar ist:

- a) man ist sich über die Werte uneinig,
- b) für den zweiten Entwicklungskoeffizienten a_5 des Längen-Produktionsterms werden keine Angaben gemacht ($a_5 \neq 0$).
- c) Es wurde die Erfahrung gemacht, daß die Konstanten keineswegs universell gültig sind; Rodi-Spalding [113] mußten für den aus einer runden bzw. einer rechteckigen Düse austretenden turbulenten Freistrahls Konstanten verwenden, die sich fast um den Faktor Zwei unterscheiden; Ng-Spalding [91] verwenden für a_6 eine Ortsfunktion.

Von großer Bedeutung ist die Frage, welche Variationen der Modell-Gleichungs-Lösungen sich ergeben, wenn die Konstanten variiert werden, d.h.welche Auswirkungen die Unsicherheiten in den Werten der einzelnen Konstanten haben. Ng-Spalding [91] haben zur Untersuchung dieser Frage ihre Konstanten jeweils um 5% verändert und berechnet, um wieviel dann die als Zielwerte benutzten integralen Größen variieren. Im Mittel ergaben sich die in Tabelle 2 angegebenen Variationen. Hierbei sind die Konstanten nach der Größe der aus ihrer Variation sich ergebenden Zielwert-Veränderung sortiert. Erkennbar ist:

- a) Die exakte Bestimmung der Konstanten, die in den Quell- und Senken-Termen auftreten, ist wichtiger als die der in den Diffusionstermen.
- b) Von größter Bedeutung ist die richtige Modellierung des Längen-Produktionsterms. Hier ist also die Berücksichtigung weiterer Terme wünschenswert.

Insbesondere Punkt b) ist ein wichtiges Argument für den Versuch, die Konstanten aus numerisch simulierten Strömungsfeldern zu berechnen. Denn ein numerisches Verfahren, das seinerseits Modelle für die Feinstruktur benötigt, kann keine sonderlich glaubhaften Ergebnisse liefern für Terme, die durch diese Feinstruktur entscheidend beeinflußt werden, wie dies die Energie-Dissipation und die Diffusionsterme sind. Andererseits kann man erwarten, daß die Terme realistisch berechenbar sind, die vornehmlich durch die aufgelöste Grobstruktur bestimmt werden, und hierzu gehören gerade der Längen-Produktionsterm sowie die zeitlich gemittelte Reynolds-Spannung $\langle u'w' \rangle$. In dieser Arbeit wird daher insbesondere versucht, die Konstanten a_1 , a_4 und a_5 zu bestimmen.

3. Über Maschenvolumina gemittelte Grundgleichungen

Zur Vorbereitung des Differenzenverfahrens und des Feinstrukturmodells für die direkte Simulation werden in diesem Kapitel die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls über Maschenvolumina gemittelt. Zudem wird eine Erhaltungsgleichung für die innerhalb der Masche enthaltene kinetische Energie der Schwankungsgeschwindigkeiten abgeleitet. Das Kapitel enthält rein formale Ableitungen also keine physikalisch zu begründenden Näherungen. Die beschriebene Vorgehensweise ist neu und erlaubt gegenüber früheren Arbeiten die Erstellung genauerer Differenzenapproximationen und Feinstrukturmodelle. Den Abschluß dieses Kapitels bildet eine Übersicht über die Grundgedanken der nachfolgenden Kapitel.

3.1 Begründung und Definition der Maschenmittelung

Zur Erstellung eines Differenzenverfahrens teilt man den betrachteten Strömungsraum in möglichst viele regelmäßig angeordnete Maschen auf und speichert pro Masche je einen der zu integrierenden Feldwerte. Neben der räumlichen Aufteilung wird auch die Zeitachse in endlich große Zeitintervalle Δt aufgeteilt und für jedes Zeitintervall an allen räumlichen Orten je einer der Feldwerte gespeichert. Sodann sind bekanntlich Differentiale der Feldwerte zu approximieren durch Differenzen von Feldwerten in verschiedenen benachbarten Maschen. Zu derartigen Differenzenapproximationen gelangt man üblicherweise entweder durch Taylorreihenentwicklungen und Abbruch der Reihe nach wenigen Gliedern oder durch formale Integration der Differentialgleichungen über eine Raum-Zeit-Masche und Approximation der nicht analytisch integrablen Terme.

Voraussetzung für die Zulässigkeit des Abbrechens der Taylor-Reihenentwicklung nach wenigen, z.B. nach n Gliedern [13]

$$f(x) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) x^i \quad (3-1)$$

ist, daß das Restglied

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta \cdot x), \quad 0 < \theta < 1 \quad (3-2)$$

vernachlässigbar klein ist. Bei den stark unregelmäßigen turbulenten Strömungsfeldern darf man jedoch nicht ohne weiteres annehmen, daß das Produkt $x^{n+1} f^{(n+1)}$ auch für kleine x genügend klein ist, da die Ableitungen $f^{(n+1)}$ mit wachsendem n wohlmöglich stark wachsen. Für turbulente Strömungen muß daher der zweite Weg beschritten werden. Hier werden zwar auch Näherungen notwendig sein, die jedoch lediglich voraussetzen, daß die höheren Ableitungen der über Maschenvolumina gemittelten (also geglätteten) Feldwerte hinreichend

klein sind. Die Wirkung der unregelmäßigen Feinstruktur innerhalb der Maschen wird jedoch auch in den gemittelten Gleichungen wiedergegeben, wie durch sogenannte Reynolds-Spannungen sichtbar werden wird; diese Terme erhält man bei Taylor-Reihenentwicklungen nicht.

Damit wird zunächst dem Vorgehen von z.B. Lilly [80,81] und Deardorff [29] gefolgt. Diese Autoren haben jedoch bei der Mittelung, also bei der Integration über Maschenvolumina und anschließender Division durch das jeweilige Maschenvolumen, nicht berücksichtigt, daß die Integration teilweise analytisch ausgeführt werden kann. Sie müssen daher annehmen, daß gilt

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial u}{\partial x} dx \approx \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} u dx, \quad (3-3)$$

was natürlich nicht richtig ist. Richtig wäre

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \frac{u(x+\frac{\Delta x}{2}) - u(x-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \equiv \delta_x u(x) \quad (3-4)$$

Dies hat zur Folge, daß die im Differenzenverfahren betrachteten Feldwerte fälschlich als Volumenmittelwerte identifiziert werden, während sie richtiger als Flächenmittelwerte zu identifizieren sind. Formal gelangt man hierdurch zwar (bei äquidistanten Maschennetzen) zu gleichen Differenzenformeln für die gemittelten Feldwerte, jedoch zu einer anderen Definition und Approximation der die Feinstruktur beschreibenden Reynolds-Spannungen, sowie zu anderen Randbedingungen der Differenzenformeln. Dies wird in den folgenden Abschnitten deutlich werden.

Zunächst sollen das verwendete Maschennetz und die darin definierten Mittelungen erläutert werden. Das Maschennetz ist bestimmt durch ein (nicht notwendig äquidistantes) Feld von Flächen $x_1 = \text{const.}$ und $t = \text{const.}$ Eine Masche mit den Indices l, m, n, p ist das folgende Raum-Zeit-Element:

$$V_{l,m,n,p} \equiv \left\{ (x_1, x_2, x_3, t); \begin{array}{l} x_{1|l-\frac{1}{2}} \leq x_1 \leq x_{1|l+\frac{1}{2}} \\ x_{2|m-\frac{1}{2}} \leq x_2 \leq x_{2|m+\frac{1}{2}} \\ x_{3|n-\frac{1}{2}} \leq x_3 \leq x_{3|n+\frac{1}{2}} \\ t|_{p-\frac{1}{2}} \leq t \leq t|_{p+\frac{1}{2}} \end{array} \right\} \quad (3-5)$$

wobei die Koordinaten $x_1|_{l+\frac{1}{2}}, x_2|_{m+\frac{1}{2}}, x_3|_{n+\frac{1}{2}}, t|_{p+\frac{1}{2}}$ mit ihren Indices monoton wachsen und zudem gilt (z.B.)

$$\begin{aligned} 1 \gg \Delta x_{1l} &\equiv x_{1|l+\frac{1}{2}} - x_{1|l-\frac{1}{2}} > 0 \\ 1 \gg \Delta t_p &\equiv t|_{p+\frac{1}{2}} - t|_{p-\frac{1}{2}} > 0 \end{aligned}$$

Die Mittelung einer Größe y in einem Volumen V' (daß sowohl gleich dem Maschen-
volumen als auch einem versetzt zu den Maschenvolumen angeordneten Raum-Zeit-
Bereich sein kann) ist definiert als

$$\bar{y}_{V'} \equiv \frac{1}{V'} \iiint_{V'} y \, dV' \quad (3-6)$$

Wenn das Volumen V' gleich $V_{l,m,n,p}$ ist, gilt:

kartesisch:

$$\bar{y}_{l,m,n,p} \equiv \frac{1}{\Delta x_l \cdot \Delta x_m \cdot \Delta x_n \cdot \Delta t_p} \int_{t/p-\frac{1}{2}}^{t/p+\frac{1}{2}} \int_{x_3/m-\frac{1}{2}}^{x_3/m+\frac{1}{2}} \int_{x_2/n-\frac{1}{2}}^{x_2/n+\frac{1}{2}} \int_{x_1/l-\frac{1}{2}}^{x_1/l+\frac{1}{2}} y(x_1', x_2', x_3', t') \, dx_1' \, dx_2' \, dx_3' \, dt' \quad (3-7)$$

zylindrisch:

$$\bar{y}_{l,m,n,p} \equiv \frac{1}{\Delta x_l \cdot \Delta \varphi_m \cdot \Delta r_n \cdot \Delta t_p} \int_{t/p-\frac{1}{2}}^{t/p+\frac{1}{2}} \int_{\varphi/n-\frac{1}{2}}^{\varphi/n+\frac{1}{2}} \int_{r/m-\frac{1}{2}}^{r/m+\frac{1}{2}} \int_{x/l-\frac{1}{2}}^{x/l+\frac{1}{2}} y(x, \varphi', r', t') \, dx \cdot r \, d\varphi \, dr \, dt \quad (3-8)$$

$$r/n = \frac{1}{2} (r/n+\frac{1}{2} + r/n-\frac{1}{2})$$

3.2 Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltung)

Wir betrachten zunächst kartesische Koordinaten. Die exakte Differential -
gleichung $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ (1-6)

soll über V gemittelt werden. Wir erhalten:

$$\bar{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}} = 0 = \frac{1}{\Delta x_l \Delta x_m \Delta x_n \Delta t_p} \iiint_{V'} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \, dx_1' \, dx_2' \, dx_3' \, dt' \quad (3-9)$$

Beachten wir, daß hier jeder der drei Summanden des Integranden bezüglich
einer (jeweils der x_i -) Koordinate formal integriert werden kann, so erhalten
wir jeweils Differenzen von Termen, in denen nur noch über zwei räumliche Vari-
ablen und die Zeit zu integrieren ist, also über ein Maschenflächenstück und
ein Zeitintervall. Dieser im Ort-Zeit-Raum definierte Bereich wird im folgenden
stets als "Fläche" bezeichnet. Definieren wir zur Abkürzung der Schreibweise
diese Flächenmittelwerte als \bar{y} , wobei z.B.

$$\bar{y}_{l+\frac{1}{2},m,n,p} \equiv \frac{1}{\Delta x_2/m \cdot \Delta x_3/n \cdot \Delta t/p} \int_{t/p-\frac{1}{2}}^{t/p+\frac{1}{2}} \int_{x_3/n-\frac{1}{2}}^{x_3/n+\frac{1}{2}} \int_{x_2/m-\frac{1}{2}}^{x_2/m+\frac{1}{2}} y(x_1/l+\frac{1}{2}, x_2', x_3', t') \, dx_2' \, dx_3' \, dt'$$

sei, sowie die auftretenden Differenzen als $\delta x_i y$, wobei z.B.

$$\delta x_1 y_{l,m,n,p} \equiv \frac{1}{\Delta x_l} (y_{l+\frac{1}{2},m,n,p} - y_{l-\frac{1}{2},m,n,p})$$

sei, so ergibt die Mittelung,

$$\bar{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}}_{l,m,n,p} = \delta x_i \bar{u_i}_{l,m,n,p} \quad (3-10)$$

Diese Gleichung ist exakt und entspricht formal dem Gauß'schen Integralsatz [13]:

$$\int_V \operatorname{div} \underline{u} \, dV = \oint_F \underline{u} \cdot d\underline{F}$$

In analoger Weise ergibt sich für zylindrische Koordinaten (ausgehend von (1-8))

$$\delta_x \bar{v}_x + \frac{1}{r_n} \delta_\varphi \bar{v}_\varphi + \frac{1}{r_n} \delta_r (r \bar{v}_r) = 0 \Big|_{l,m,n,p} \quad (3-11)$$

wobei z.B.

$$\bar{v}_x \Big|_{l+\frac{1}{2},m,n,p} \equiv \frac{1}{\Delta r_n r_n \Delta \varphi_m \Delta t_p} \int_{r_{n-1}}^{r_{n+1}} \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_{m+1}} \int_{t_{p-1}}^{t_{p+1}} v_x(x|_{l+\frac{1}{2}}, \varphi', r', t') \, d\varphi' r' dr' dt' \quad (3-12)$$

und die Differenzenquotienten $\delta_x, \delta_\varphi, \delta_r$ entsprechend den kartesischen δ_{x_i} definiert sind.

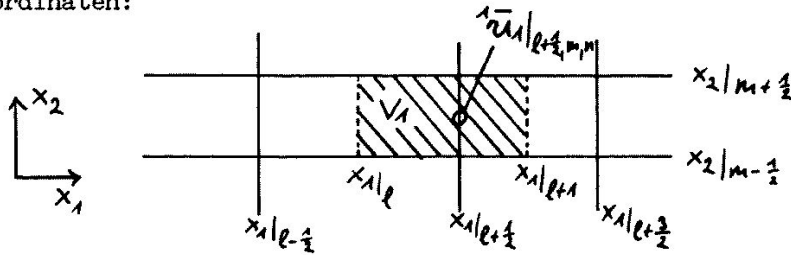
Wir halten als Ergebnis fest: Zumindest die Kontinuitätsgleichung kann in exakter Weise durch Differenzenformeln ersetzt werden, wenn die dabei auftretenden Geschwindigkeitsmittelwerte als Mittelwerte der Geschwindigkeiten über (ein Zeitintervall Δt und) ein Maschenflächenstück definiert sind, dessen Normale mit dem Geschwindigkeitskomponentenvektor parallel ist.

Da diese Flächenmittelwerte je nach Geschwindigkeitskomponente über ein anderes Flächenstück der Masche gebildet werden, verwendet man ein sogenanntes "staggered grid" [29,30,33,42,54,62,96,141], d.h. ein "überlapptes Maschenetz", bei dem die zu speichernden Geschwindigkeitswerte je nach Richtung unterschiedlichen Orten zugeordnet werden. Abb.5 zeigt das verwendete Netz. Die Verwendung dieses Maschennetzes wurde in der Literatur bisher nicht mit der Bildung von Flächenmittelwerten sondern lediglich mit der Einfachheit und Genauigkeit bezüglich Abbruchfehlern der sich hierbei ergebenden Differenzenformeln begründet [33,96].

3.3 Gemittelte Impulserhaltungsgleichungen

Analog zur gemittelten Kontinuitätsgleichung sollen nun die gemittelten Impulserhaltungsgleichungen abgeleitet werden. Wegen der Kompliziertheit dieser Gleichungen wird man hier kein so einfaches und elegantes Ergebnis erwarten können. Jedoch soll gezeigt werden, wie weit die Differentialgleichungen auf rein formalem Weg einer Differenzenschreibweise näher gebracht werden können und wo Approximationen zu Hilfe genommen werden müssen.

Entsprechend dem überlappendem Maschennetz wird je nach Gleichungskomponente ein Volumen gemittelt, das räumlich die Bezugsfläche des Flächenmittelwertes der betrachteten Geschwindigkeitskomponente etwa in der Mitte enthält. Folgende Skizze zeigt dies V_1 für die Komponente 1 der Impulsgleichungen in kartesischen Koordinaten:



$$x_{1/l} \equiv \frac{1}{2} (x_{1/l-1/2} + x_{1/l+1/2}) \quad (3-12)$$

Die Begrenzung des Volumens V_1 in x_1 -Richtung durch die Mittelflächen zwischen Koordinatenflächen $x_{1/l+1/2} = \text{const}$ wird gewählt, da dann der Fehler später notwendiger Differenzenapproximationen am kleinsten wird. Werden die Impuls-Erhaltungs-Gleichungen über derartige Volumina V_1 gemittelt und dabei Integrationen, wo möglich, formal ausgeführt, so ergibt sich^{*)}:

kartesisch:

$$V_1 \overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} = - \delta_j^i \overline{(u_i u_j)} - \delta_{x_i} \overline{\rho} + \delta_{x_j} \left[\overline{v \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \right] + \delta_{x_i} \overline{P_x} \quad (3-14)$$

zylindrisch:

$$\begin{aligned} & V_x \overline{\frac{\partial v_x}{\partial t}} + \delta_x^x \overline{v_x^2} + \frac{1}{r} \delta_\varphi^x \overline{(v_\varphi v_x)} + \frac{1}{r} \delta_r^x \overline{(r v_r v_x)} = - \delta_x^x \overline{\rho} + \overline{P_x} \\ & + \delta_x^x \left\{ \overline{v \cdot 2 \frac{\partial v_x}{\partial x}} \right\} + \frac{1}{r} \delta_\varphi^x \left\{ \overline{v \left(\frac{\partial v_x}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial x} \right)} \right\} + \frac{1}{r} \delta_r^x \left\{ \overline{r v \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right)} \right\}; \\ & V_\varphi \overline{\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}} + \delta_x^x \overline{(v_x v_\varphi)} + \frac{1}{r} \delta_\varphi^x \overline{(v_\varphi^2)} + \frac{1}{r} \delta_r^x \overline{(r v_r v_\varphi)} + \frac{1}{r} \overline{(v_r v_\varphi)} = - \frac{1}{r} \delta_\varphi^x \overline{\rho} \\ & + \delta_x^x \left\{ \overline{v \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial \varphi} \right)} \right\} + \frac{1}{r} \delta_\varphi^x \left\{ \overline{2 v \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right)} \right\} + \frac{1}{r} \delta_r^x \left\{ \overline{r v \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)} \right\} \\ & + \left\{ \overline{\frac{v}{r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)} \right\}; \\ & V_r \overline{\frac{\partial v_r}{\partial t}} + \delta_x^x \overline{(v_x v_r)} + \frac{1}{r} \delta_\varphi^x \overline{(v_\varphi v_r)} + \frac{1}{r} \delta_r^x \overline{(r v_r^2)} - \frac{1}{r} \overline{v_\varphi^2} = - \delta_r^x \overline{\rho} \\ & + \delta_x^x \left\{ \overline{v \left(\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial r} \right)} \right\} + \frac{1}{r} \delta_\varphi^x \left\{ \overline{v \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right)} \right\} + \frac{1}{r} \delta_r^x \left\{ \overline{2 v r \frac{\partial v_r}{\partial r}} \right\} \\ & - 2 \frac{v}{r} \left\{ \overline{\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}} \right\}. \end{aligned} \quad (3-15)$$

*) Anstelle die differentiellen Erhaltungssätze über Volumina zu integrieren, könnte man von den integralen Erhaltungssätzen ausgehen. Die hier verwendete Vorgehensweise erscheint bezüglich der Berücksichtigung krummliniger Koordinaten einfacher.

Hierbei ist

$$\bar{r}/n+1/2 \equiv \frac{1}{2} (\tau_{n+1} + \tau_n) \equiv \frac{1}{4} (\tau_{n-1/2} + 2\tau_{n+1/2} + \tau_{n+3/2}) \quad (3-16)$$

der Mittelwert des Radius im Volumen V_r .

Bei den Konvektionstermen treten Flächenmittelwerte (und bei Coriolis- und Zentrifugalbeschleunigung Volumenmittelwerte) von Geschwindigkeitsprodukten auf. Hier kann formal in Mittelwerte und Schwankungsgrößen aufgespalten werden:

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u_i} \overline{u_j} + \overline{(u_i - \overline{u_i})(u_j - \overline{u_j})} \quad (3-18)$$

Definiert man als Schwankungsgröße u_i' die lokale Abweichung der Geschwindigkeit von ihrem (Flächen-) Mittelwert,*)

$$u_i' \equiv u_i - \overline{u_i} \quad (3-19)$$

so erhält man

$$\overline{u_i u_j} = \overline{u_i} \overline{u_j} + \overline{u_i' u_j'} \quad (3-20)$$

Damit findet man, daß auch hier, wie bei der zeitlichen Mittelung gemäß Kap.2.1, Terme auftreten, die man ebenfalls als Reynolds-Spannungen [107] bezeichnen kann. Im Unterschied zu den bei zeitlicher Mittelung entstehenden Reynolds-Spannungen, verschwinden diese hier, wenn der Durchmesser des Volumens gegen Null geht, da dann auch u_i' gegen Null geht.

Wir halten als Ergebnis fest: Viele Terme der Impulserhaltungsgleichungen lassen sich bei Volumenmittelung formal integrieren und in Differenzenform überführen. Hierbei entstehen Korrelationen zwischen auf Flächen- (oder seltener Volumen-) Mittelwerte bezogenen Schwankungsgeschwindigkeiten von Art der Reynolds-Spannungen, die jedoch bei verschwindendem Volumenelement-Durchmesser zu Null werden. Neben diesen Reynolds-Spannungen treten zahlreiche Geschwindigkeitsmittelwerte auf, die nicht mit den im Maschennetz gespeicherten übereinstimmen, sowie Terme mit (allerdings nur ersten!) Ableitungen. Man hat hier also mehr Unbekannte als Gleichungen und muß diese Unbekannten über Näherungen aus den bekannten Geschwindigkeitsmittelwerten berechnen.

Diese Näherungen werden in Kap. 5 und 6 eingeführt. Für die Erstellung der Näherungen für die Reynolds-Spannungen ist zuvor noch die über das Volumen gemittelte Erhaltungsgleichung der kinetischen Energie aufzustellen.

*) eindeutig wäre eine Notation $u_i^{j'} \equiv u_i - \overline{u_i}$; da sich jedoch keine Zweifelsfälle ergeben, wird auf diese kompliziertere Schreibweise verzichtet.

3.4 Gemittelte Erhaltungsgleichungen der kinetischen Energie

Im folgenden soll eine Erhaltungsgleichung für die kinetische Energie der Schwankungsgeschwindigkeiten innerhalb eines Maschenvolumens abgeleitet werden, also für

$$\overline{v E'} \equiv \frac{1}{2} \overline{(u_i - \bar{u}_i)^2} = \frac{1}{2} (\overline{u_i^2} - (\bar{u}_i)^2)$$

Zu dieser Erhaltungsgleichung gelangen wir nach Bildung der zeitlichen

$$\text{Ableitung } \overline{\frac{\partial E'}{\partial t}} = \left(\frac{1}{2} \overline{\frac{\partial u_i^2}{\partial t}} - \bar{u}_i \overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}} \right)$$

indem wir von den Gleichungen (1-7) bzw. (1-9) den Volumenmittelwert bilden und sodann das Skalarprodukt des Geschwindigkeitsvektors \bar{u}_i mit $\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}}$ gemäß (3-14) bzw. (3-15) subtrahieren.

Wir erhalten, ähnlich wie in den Kap. 3.2 und 3.3, für kartesische Koordinaten:

$$\overline{\frac{\partial u_i^2/2}{\partial t}} = \overline{\frac{\partial E}{\partial t}} = -\delta_{x_j} \overline{(u_j E)} - \delta_{x_i} \overline{(u_i p)} + \delta_{x_j} \overline{\left(v \left(\frac{\partial E}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i} \right) \right)} - \bar{u}_x \overline{p_x} \quad (3-21)$$

Führt man gemäß (3-19) als Schwankungsgrößen ein

$$u_j' \equiv u_j - \bar{u}_j; \quad p' \equiv p - \bar{p}; \quad v' \equiv v - \bar{v} \quad (3-22)$$

wobei der Strich im Zusammenhang mit der Mittelungsoperation zu verstehen ist, sowie

$$\bar{E} \equiv \frac{1}{2} \overline{(u_i)^2}; \quad \bar{E'} \equiv \frac{1}{2} \overline{(u_i - \bar{u}_i)^2} \quad (3-23)$$

so folgt:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial E}{\partial t}} &= -\delta_{x_j} \left(\overline{E' u_j} + \overline{u_j E'} + \frac{1}{2} \overline{u_i'^2 u_j'} \right) - \delta_{x_j} \left(\overline{u_i' u_j' u_i'} \right) \\ &\quad - \delta_{x_i} \left(\overline{u_i' p'} \right) - \delta_{x_i} \left(\overline{p' u_i'} \right) + \bar{u}_x p_x - \bar{E} \\ &\quad + \delta_{x_j} \left(\bar{v} \left(\frac{\partial \bar{E'}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{E'}}{\partial x_j} + \frac{\partial (\bar{u}_i u_j)}{\partial x_i} \right) \right) \\ &\quad + \delta_{x_j} \left(\overline{v' \left(\frac{\partial E}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i} \right)'} \right) \end{aligned} \quad (3-24)$$

Andererseits ergibt das Skalarprodukt $\overline{u_i} \cdot \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t}$:

$$\overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} = - \overline{u_i} \delta_{x_i} (\overline{u_i} \overline{u_j} + u_i' u_j') - \overline{u_i} \delta_{x_i} \overline{p} + \overline{u_i} p_x + \overline{u_i} \delta_{x_j} \left[\overline{v} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) + \overline{v'} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)' \right] \quad (3-25)$$

Führt man hier folgende arithmetische Mittelungsoperation ein:

$$\overline{y'} \equiv \frac{1}{2} \left(y(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) + y(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) \right), \quad (3-26)$$

beachtet die Identitäten:

$$\delta_{x_i} (\alpha b) \equiv \overline{\alpha}^i \delta_{x_i} b + \overline{b}^i \delta_{x_i} \alpha, \quad (3-27)$$

$$\frac{1}{2} \delta_{x_i} (\alpha^2) = \overline{\alpha}^i \delta_{x_i} \alpha, \quad (3-28)$$

und nimmt als Näherung an^{*)}:

$$\overline{u_i} \approx \overline{u_i}^i, \quad (3-29)$$

so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} &= - \delta_{x_j} (\overline{u_i} \overline{u_j} + \overline{u_i'} \overline{u_j'}) + \overline{u_i'} \overline{u_j'} \delta_{x_j} \overline{u_i} - \delta_{x_i} (\overline{u_i} \overline{p}) + \overline{u_i} p_x \\ &- \delta_{x_j} \left(\overline{v} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) + \overline{v'} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)' \right) \\ &- \overline{u_i} \delta_{x_j} \left(\overline{v'} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)' \right) \end{aligned} \quad (3-30)$$

Subtrahiert man nun dieses Ergebnis von Gl.(3-24), so folgt die gesuchte

Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{E}}{\partial t} &= - \underbrace{\delta_{x_j} (\overline{u_i} \overline{u_j} \overline{E})}_{\text{I}} - \underbrace{\overline{u_i'} \overline{u_j'} \delta_{x_i} \overline{u_i}}_{\text{II}} \\ &+ \underbrace{\delta_{x_j} \left\{ \overline{v} \frac{\partial \overline{E}}{\partial x_j} + \overline{u_i} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} - \overline{u_i'} \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} - \overline{u_j'} \overline{E'} - \overline{u_j'} \overline{p'} \right\}}_{\text{IV a}} \\ &+ \underbrace{\delta_{x_j} \left\{ \overline{v'} \left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial x_j} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i} \right)' - \overline{u_i'} \overline{v'} \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} \right)' \right\}}_{\text{IV b}} \\ &- \underbrace{\frac{\overline{v} \overline{E}}{\overline{V a}}}_{\text{V}} + \underbrace{\overline{v} \left\{ \delta_{x_j} \overline{u_i} (\delta_{x_j} \overline{u_i} + \delta_{x_i} \overline{u_j}) \right\}}_{\text{V b}} \end{aligned} \quad (3-31)$$

Die Terme haben folgende Bedeutung:

- I zeitliche Änderung der gemittelten Schwankungsenergie
- II Konvektion an Schwankungsenergie
- III Produktionsterm; Arbeit der Reynolds-Spannungen
- IV Diffusionsterme; der Term IVb kann in der Regel vernachlässigt werden, da die Zähigkeitsschwankungen vermutlich nicht mit den übrigen Termen korreliert sind.
- V Dissipation an Schwankungsenergie

*) Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt:

$$\overline{u_i} = \overline{u_i}(\underline{\xi}) \quad , \text{ wobei } \underline{\xi} \text{ ein Punkt im Volumen V ist.}$$

Va: Gesamt-Dissipation

Vb: Dissipation infolge der gemittelten Geschwindigkeiten

3.5 Übersicht über die Grundgedanken zur Erstellung eines geschlossenen Gleichungssystems

In diesem Abschnitt wird zum besseren Verständnis der folgenden Kapitel ein Abriß der Modelle dargestellt, die schließlich die Aufstellung eines geschlossenen Systems von Differenzengleichungen erlauben. Hierbei werden nur kartesische Koordinaten betrachtet.

Die Gleichung (3-14) mit der Aufspaltung der konvektiven Terme gemäß (3-20) enthält zwei Arten von unbekannten Größen, die über Näherungen aus den im Maschennetz gespeicherten Größen berechnet werden müssen: einerseits Größen wie z.B. $\overline{u_i}$, die über lineare Beziehungen (algebraische Mittelwerte) aus benachbarten Maschenwerten (im Beispiel aus benachbarten Werten von $\overline{u_1}$) näherungsweise berechnet werden müssen und andererseits die Feinstruktur-Reynolds-Spannungen $\overline{u_i' u_j'}$, die über nichtlineare Näherungen aus dem gemittelten Geschwindigkeitsfeld $\overline{u_1}$ und der kinetischen Energie der Feinstruktur innerhalb einer Masche $\overline{v^2 E}$ zu berechnen sind. Auf die linearen Näherungen, die von einfacher Natur sind, wird in Kap.6 eingegangen. Das Hauptproblem und den größten Teil dieser Arbeit macht die Modellierung der nichtlinearen Feinstruktur-Reynolds-Spannungen aus. Die Prinzipien des hierfür verwendeten Modells, die im einzelnen in Kap.4 und 5, sowie den Anhängen 1 bis 3 dargestellt werden, seien im folgenden kurz erläutert.

Für die Feinstruktur-Reynolds-Spannungen wird ein Ansatz verwendet, der die Form eines Boussinesq-Ansatzes hat:

$$\overline{u_i' u_j'} = -\mu \left(\delta_{ij} \overline{u_k} + \delta_{ik} \overline{u_j} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_l' u_l'} \quad (3-32)$$

Hierbei ist μ eine noch zu bestimmende turbulente Zähigkeit. Der Index soll an die Tatsache erinnern, daß die Zähigkeit je nach Größe und Form der betrachteten Fläche, über die gemittelt wird, unterschiedlich sein wird.

Der Boussinesq-Ansatz setzt die Koinzidenz verschwindender Schubspannung mit verschwindender Geschwindigkeitsdeformation voraus. Wie in Kap. 2.2 diskutiert, ist diese Bedingung für das zeitlich gemittelte Strömungsfeld nicht immer gegeben. Der Grund ist dabei der deterministisch wirkende Einfluß der Wände oder der Geometrie.

Die Analogie des Boussinesq-Ansatzes zum molekularen Newtonschen Schubspannungsansatz setzt also voraus, daß der turbulente Austauschvorgang, wie der molekulare Impulstransport von rein statistischer Natur ist. Diese Voraussetzung ist jedoch für die Feinstruktur wohl eher gegeben als für die Grobstruktur und also scheint der Ansatz insofern zulässig zu sein. Der Boussinesq-Ansatz stellt demnach bereits prinzipiell eine Näherung dar, als genaugenommen die Reynolds-Spannungen selbst durch Integration einer entsprechenden Erhaltungsgleichung (in Form einer partiellen Differentialgleichung) bestimmt werden müßten. Der wesentliche Fehler dieser Näherung dürfte darin bestehen, daß die Reynolds-Spannungen in der Näherung stärker mit der im Maschennetz wiedergegebenen aktuellen Grobstruktur des Geschwindigkeitsfeldes verkoppelt sind, als es die exakten Gleichungen vorschreiben. Um diesen Effekt wenigstens teilweise zu berücksichtigen, wird die Zähigkeit ν hier nicht - wie etwa beim Prandtl'schen Mischungsweg-Modell, Gl.(2-5) und wie auch bei Deardorff (siehe Kap.5.1) - durch eine algebraische Beziehung aus dem über Maschenflächen gemittelten Geschwindigkeitsfeld berechnet, sondern mittels

$$\nu = c \left(\overline{E} \cdot F \right)^{1/2} \quad (3-33)$$

aus der kinetischen Energie der Feinstruktur berechnet, für die eine (3-31) entsprechende Transport-Gleichung mitintegriert wird. \overline{E} ist die kinetische Energie innerhalb der betrachteten Maschenfläche, deren Betrag gleich F ist. Dieser Ansatz läßt sich physikalisch noch etwas detaillierter begründen. Hier wollen wir uns damit begnügen, daß er dimensionsmäßig richtig ist und plausibel erscheint.

Das Problem besteht nun in der Bestimmung der Konstanten c . Wir suchen hier nach einer Bestimmungsmethode, die möglichst weitgehend von Experimenten unabhängig ist; da dies nicht ganz erreicht werden kann, fordern wir, daß die experimentelle Unterstützung unabhängig von der gerade betrachteten Geometrie ist, so daß die daraus abgeleiteten Modelle auch auf andere Problembereiche übertragen werden können.

Zu einer Bestimmungsgleichung für die Konstante c kommen wir, indem wir den Ansatz (3-32, 33) in die Erhaltungsgleichung für die kinetische Energie (3-31) einsetzen, in der die Feinstruktur-Reynolds-Spannungen im Produktionsterm auftreten. Wir nehmen nun an, daß die betrachtete turbulente Strömung im statistischen Sinne stationär sei; dann verschwindet die zeitliche Änderung der

Energie $\overline{V E'}$, wenn wir zeitlich mitteln. Bei einer zusätzlichen Mittelung über das gesamte Strömungsvolumen verschwinden auch die konvektiven und diffusiven Terme, da über die Wände keine kinetische Energie übertragen werden kann. Übrig bleibt lediglich die Bilanz zwischen der Produktion und der Dissipation. Diese Bilanz ergibt uns die prinzipielle Bestimmungsgleichung für die Konstante c (im folgenden für $V \ll 1$ dargestellt):

$$c = \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\left\langle (jE'jF)^{1/2} (\delta_{x_j} \bar{u}_i + \delta_{x_i} \bar{u}_j)^j \delta_{x_j} \bar{u}_i \right\rangle} \quad (3-34)$$

Näherungsweise kann man diese Gleichung umformen in:

$$c = \frac{\langle \varepsilon \rangle}{\sigma \langle jE'jF \rangle^{1/2} \left\langle (\delta_{x_j} \bar{u}_i + \delta_{x_i} \bar{u}_j)^j \delta_{x_j} \bar{u}_i \right\rangle} \quad (3-35)$$

$$(3-36)$$

Die im Nenner dieser Gleichung auftretenden Terme können nun mit Hilfe der Theorie isotroper Turbulenz und nach experimenteller Bestimmung einer einzigen "Konstanten" (der Kolmogorov-Konstanten α) quantitativ mit der mittleren Dissipation $\langle \varepsilon \rangle$ so in Beziehung gesetzt werden, daß diese schließlich herausgekürzt werden kann. Bei den zu berechnenden Termen handelt es sich um den zeitlichen Mittelwert der kinetischen Energie der Schwankungsbewegung in einer Maschenfläche, sowie um den zeitlichen Mittelwert einer Differenzenform des Deformationsgeschwindigkeitsquadrates D_{ij}^2 , das als Differentialquotient durch

$$D_{ij}^2 = 2 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \quad (3-37)$$

definiert ist. Diese Terme, auch Korrelationen genannt, werden in Kap. 4 bzw. Anhang 2 berechnet. Hierbei werden die Korrelationen auf rein mathematischem Wege zurückgeführt auf relativ komplizierte Integrale, in denen außer geometrisch bestimmten Faktoren nur noch die Korrelationen zwischen Geschwindigkeitskomponenten an zwei Punkten auftreten. Diese sogenannten Zwei-Punkte-Korrelationen können nun ihrerseits für isotrope, inkompressible Turbulenz aufgrund kinematischer Beziehungen berechnet werden, wenn das Energiespektrum der Geschwindigkeitsschwankungen bekannt ist. Für das Energiespektrum gibt es nun aber physikalische Modellvorstellungen, die zu der Aussage führen, daß dieses Spektrum unter gewissen Voraussetzungen eine universelle Form besitzt (bekannt als Kolmogorov-Spektrum), in der nur eine experimentell zu bestimmende Konstante auftritt. Messungen dieser Konstanten unter den

verschiedensten Bedingungen lassen den Schluß zu, daß es sich hier um eine universelle Konstante handelt. Auf diese Weise sind also die in (3-35) auftretenden Korrelationen und damit die Konstante c quantitativ bestimmbar. In der vorliegenden Arbeit wurde insbesondere der mathematische Teil dieses Rechenganges gegenüber den früheren Methoden so weiterentwickelt, daß auch nicht gleichseitige Maschen sowie die tatsächlich verwendeten Differenzenformeln berücksichtigt werden.

Nun wird man wohl einwenden, daß die Theorie isotroper Turbulenz hier nicht anwendbar ist, da die betrachtete turbulente Kanalströmung stark anisotrop und inhomogen ist. Hier hilft uns das Konzept der Lokalisotropie weiter, wie in Kap.4.1 erläutert wird. Dennoch steht der Ansatz (3-32) insofern prinzipiell im Widerspruch zur Annahme isotroper Turbulenz, als in echt isotroper Turbulenz alle Komponenten des Reynolds-Spannungs-Tensors $\overline{u_i' u_j'}$ für $i \neq j$ im zeitlichen Mittel verschwinden müßten. Wegen des von Null verschiedenen zeitlichen Mittelwertes des Geschwindigkeitsgradienten $\langle \delta_{x_3} \overline{u_i'} \rangle$ liefert der Ansatz (3-32) für $i, j = 1, 3$ jedoch von Null verschiedene Werte. Aus diesem Grunde wird in Kap.5.2 ein Konzept entwickelt, wonach die Feinstruktur-Reynolds-Spannungen in ihren zeitlichen Mittelwert (bzw. Periodenmittelwert, siehe unten) und die jeweiligen Abweichungen hiervon aufgeteilt werden:

$$\overline{u_i' u_j'} = \underbrace{\langle \overline{u_i' u_j'} \rangle}_I + \left(\overline{u_i' u_j'} - \langle \overline{u_i' u_j'} \rangle \right)_{II} \quad (3-38)$$

Lediglich für den Summand II (den "lokalisotropen Anteil") wird die Theorie isotroper Turbulenz verwendet. Für den ersten Summand I ("inhomogener Anteil") wird dagegen ein gesondertes Modell verwendet. Dieses Modell ist insbesondere dadurch gekennzeichnet, daß es für den Grenzfall sehr großer Maschen in das Prandtl'sche Mischungsweg-Modell übergeht, während es selbstverständlich für den entgegengesetzten Grenzfall sehr kleiner Maschen verschwindende Werte der Reynolds-Spannungen ergibt.

Um durch die Verwendung zeitlicher Mittelwerte nicht auf im statistischen Sinne stationäre turbulente Strömungen alleine festgelegt zu sein, werden tatsächlich bei der Aufteilung gemäß (3-38) nicht wirklich zeitliche Mittelwerte sondern sogenannte Periodenmittelwerte verwendet. Der Periodenmittelwert ist der Mittelwert über solche Ebenen des Strömungskanals, in denen die statistischen Eigenschaften des Strömungsfeldes konstant sind. Dies sind also gemäß Abb.1 bei der Platte die x_1 - x_2 - Ebenen und beim Ringspalt die x - φ - Ebenen. Die Bezeichnung

Periodenmittelwert wurde gewählt, weil an den Grenzen dieser Ebenen in dem numerischen Modell periodische Randbedingungen vorgeschrieben werden (Kap.7.1).

Auch das Modell für den inhomogenen Anteil kann quantitativ bestimmt werden, wenngleich nicht ganz so elegant wie das Modell für den lokal isotropen Anteil. Da der inhomogene Anteil nur in Wandnähe, wo das mittlere Geschwindigkeitsprofil große Gradienten besitzt, von entscheidender Bedeutung ist, kommt man hier mit einfachen Annahmen aus. Auf jeden Fall bewirkt diese Aufteilung einen wesentlichen Fortschritt gegenüber den früheren Ansätzen, bei denen auch in der unmittelbaren Wandnähe noch lokale Isotropie vorausgesetzt werden mußte; dies zeigt sich insbesondere dadurch, daß die numerischen Ergebnisse (Kap.10) auch für relativ große Maschen in Wandnähe mit Meßwerten besser als die numerischen Ergebnisse von Deardorff /29/ übereinstimmen.

Die Details dieser Modelle werden in den folgenden Kapiteln dargestellt.

4. Lokalisotrope Turbulenz und Korrelationen räumlich gemittelter Feldwerte

Für die quantitative Bestimmung des Feinstrukturmodells werden hier die aus der Theorie isotroper Turbulenz folgenden Grundlagen bereitgestellt. Für die Anwendung dieser Theorie ist deren Gültigkeit in lediglich lokalisotroper Turbulenz wichtig. Lokalisotropie wird im folgenden definiert und deren Existenzbereich durch Auswertung entsprechender experimenteller Ergebnisse bestimmt. Sodann werden zwei Methoden zur Berechnung von Korrelationen (d.h. zeitlichen Mittelwerten von Produkten) zweier räumlich gemittelter Feldgrößen dargestellt. Die Einzelheiten aus der Theorie isotroper Turbulenz sind in Anhang 1 und die zur Berechnung von Korrelationen in Anhang 2 zusammengestellt.

4.1 Lokalisotropie

4.1.1 Definition und Begründung

Ein turbulentes Strömungsfeld wird als "isotrop" bezeichnet, wenn statistische Mittelwerte beliebiger, aus dem Geschwindigkeits- und Druckfeld ableitbarer Größen (z.B. $\langle u_i u_j \rangle$) invariant sind bezüglich Rotation und Translation des Koordinatensystems. Es wird als "homogen" bezeichnet, wenn diese Mittelwerte lediglich invariant gegenüber Translation sind [6, 53, 115, 134].

Kanalströmungen sind weder isotrop noch homogen. Viele Ergebnisse der umfangreichen Theorie isotroper Turbulenz sind jedoch schon anwendbar, wenn lediglich lokal Isotropie bzw. Homogenität vorliegt. Der Begriff der "Lokalisotropie" wurde von Kolmogorov [67] eingeführt. Von "Lokalhomogenität" spricht z.B. Deissler [26]. In dieser Arbeit werden folgende Definitionen für diese Begriffe verwendet:

Ein turbulentes Strömungsfeld $\underline{u}(\underline{x}, t)$ ist lokalisotrop in einer Umgebung mit Durchmesser L_{iso} eines Ortes \underline{x}_0 , wenn

$$\left(\underline{u}(\underline{x}, t) - \langle \underline{u} \rangle(\underline{x}) \right) = \left(\underline{u}(\underline{x}_0, t) - \langle \underline{u} \rangle(\underline{x}_0) \right) \quad (4-1)$$

$$\text{für } |\underline{x} - \underline{x}_0| \leq \frac{1}{2} L_{iso}$$

bis auf vernachlässigbare Abweichungen isotrop ist.

Analog ist die Forderung, daß die Fourier-Transformierte

$$\underline{v}(\underline{k}, t) = \iiint_{\underline{x}} \underline{u}(\underline{x}, t) \exp\{ \sqrt{-1} (\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot \underline{k} \} dV(\underline{x}) \quad (4-2)$$

für $|\underline{k}| \geq 1/L_{iso}$ invariant bezüglich Rotation oder Translation des Wellenzahl-Koordinatensystems sei. Diese Definition eignet sich gut zur experimentellen Bestimmung von L_{iso} .

Lokalhomogenität ist entsprechend durch die Forderung nach Invarianz bezüglich Translation alleine definiert. Die Existenz lokaler Isotropie auch in Kanalströmungen läßt sich folgendermaßen begründen: Kanalströmungen sind bekanntlich wegen der anisotropen Randbedingungen und Impulsquellen (mittlerer Druckgradient wirkt nur in einer Richtung) in ihrer makroskopischen Struktur anisotrop. Die infolge der makroskopischen instabilen Strömung entstehenden "Turbulenzballen" haben einen relativ großen Durchmesser, der nur wenig kleiner als die charakteristische Länge der Kanalgeometrie ist. Da bei großen Reynolds-Zahlen die Dissipation der turbulenten Energie erst bei sehr kleinen "Turbulenzballen"-Durchmessern wirksam ist, müssen die großen Turbulenzballen unter dem Einfluß von Trägheitskräften in kleinere zerfallen. Hierbei bewirken die Druck-Geschwindigkeits-Korrelationen, wie Rotta [108] gezeigt hat, einen Energieaustausch zwischen den Geschwindigkeitsschwankungen verschiedener Richtungen, so daß die Bewegung der Turbulenzballen mit sinkendem Durchmesser zunehmend isotrop wird. Dies ist der physikalische Grund für die Existenz lokaler Isotropie.

4.1.2 Ergebnisse der Theorie isotroper Turbulenz

Aus der Theorie isotroper Turbulenz sind für die quantitative Bestimmung des Feinstrukturmodells vor allem die zwei folgenden Ergebnisse wesentlich. Eine ausführliche Darstellung enthält Anhang 1.

a) Die Zwei-Punkte-Korrelationen $R_{ij} \equiv \langle u_i(x - \frac{1}{2} \underline{r}) \cdot u_j(x + \frac{1}{2} \underline{r}) \rangle$, die bei isotroper Turbulenz allein von \underline{r} abhängen ($R_{ij}(x, \underline{r}) = R_{ij}(\underline{r})$), lassen sich aufgrund von Beziehungen, die rein kinematischer Natur sind (d.h. aus der Isotropiebedingung und Kontinuitätsgleichung ableitbar sind), berechnen, wenn das dreidimensionale, skalare Spektrum $E(k)$ (definiert in Anhang 1) bekannt ist; k ist eine skalare Wellenzahl (Dimension: 1/Länge).

b) Für den durch Trägheitskräfte bestimmten Wellenzahlenbereich (inertial subrange)

$$\frac{1}{L_0} < k < \frac{1}{\eta} \quad (4-3)$$

kann ein allgemeines Gesetz für das Energiespektrum angegeben werden, das als Kolmogorov-Spektrum bekannt ist:

$$E(k) = \alpha \langle \epsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} \quad (4-4)$$

α Kolmogorov-Konstante ($\alpha \approx 1.5$, vergl. Tab. 3)

k skalare Wellenzahl (Dimension: 1/Länge)

$\langle \epsilon \rangle$ mittlere Energiedissipation

L_0 makroskopischer Längenmaßstab

$\eta = (\nu^3 / \langle \epsilon \rangle)^{1/4}$ Kolmogorov-Länge

Unter Verwendung der unter a) angesprochenen Beziehungen, kann aus dem Kolmogorov-Spektrum abgeleitet werden (vergl. Anhang 1):

$$R_{[i][i]}(\tau) - R_{[i][i]}(0) = -\frac{18}{55} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \alpha \langle \epsilon \rangle^{2/3} \tau^{2/3} \left(1 - \frac{\tau_{[i]}^2}{4\tau^2}\right) \quad (4-5)$$

$$R_{ij}(\tau) = -\frac{18}{55} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \alpha \langle \epsilon \rangle^{2/3} \frac{\tau_i \tau_j}{4\tau^{4/3}} ; i \neq j \quad (4-6)$$

mit $\tau = (\tau_i \tau_j)^{1/2} = |\tau|$

für $\eta < \tau < L_0$.

Auch für andere Spektren, wie z.B. daß auch für $k \geq \frac{1}{\eta}$ gültige Pao-Spektrum (siehe Anhang 1), lassen sich diese Korrelationen errechnen; das Kolmogorov-Spektrum ist hier jedoch vorteilhaft, da es zu analytischen Ausdrücken für R_{ij} führt.

Damit diese Ergebnisse zur quantitativen Bestimmung des Feinstrukturmodells, d.h. für die lokale Struktur innerhalb der Differenzenmaschen mit mittlerer Kantenlänge h , anwendbar sind, müssen folgende Vorbedingungen erfüllt sein:

a) die Länge L_{iso} und L_0 müssen zumindest so groß wie h sein; die Kolmogorov-Länge η muß wesentlich kleiner als h sein,

b) α muß eine bekannte universelle Konstante sein.

Für die Gültigkeit dieser Vorbedingungen werden im Anhang 1 experimentelle Beweise angeführt. Aus diesen folgt:

Für $\frac{1}{300} \leq h \leq \frac{1}{30}$ und Reynolds-Zahlen $Re_m \geq 10^5$ sind obige Ergebnisse anwendbar. Der Wert der Konstanten α kann aufgrund mehrerer Messungen (u.a. auch in einer Kanalströmung) und theoretischer Abschätzungen mit einem Fehler von ca. $\pm 5\%$ zu

$$\alpha = 1.5$$

angenommen werden.

4.2 Methoden zur Berechnung räumlicher Korrelationen

4.2.1 Definition und Voraussetzungen

In den folgenden Abschnitten werden zwei Methoden zur Berechnung von Korrelationen der Art

$$R(\psi_1, \psi_2, V_1, V_2, \underline{x}) \equiv \left\langle \overline{\psi_1}(\underline{x}) \cdot \overline{\psi_2}(\underline{x} + \underline{x}) \right\rangle \quad (4-7)$$

dargestellt. Hierbei sind ψ_1 und ψ_2 zwei turbulente Felder (Geschwindigkeiten, Drücke oder Ableitungen hiervon). V_1, V_2 bezeichnen räumliche Mittelungsvolumina, die ein-, zwei- oder dreidimensional sein können und deren Mittelpunkt durch \underline{x} bzw. $\underline{x} + \underline{x}$ gegeben sind. Die Mittelungsoperationen sind linear und durch Integrale der Form

$$\overline{\psi_1}(\underline{x}) \equiv \frac{1}{V_1} \int_{V_1} \psi_1(\underline{x} + \underline{y}) dV(\underline{y}) \quad (4-8)$$

definiert. Beispielsweise ist der zeitliche Mittelwert der kinetischen Energie innerhalb eines Maschenvolumens V :

$$\overline{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 R(u_i, u_i, V, V, 0)$$

Es wird vorausgesetzt, daß ψ_1 und ψ_2 lokalisotrop sind innerhalb eines Bereichs, dessen Durchmesser gegeben ist durch den maximalen Abstand der Punkte in dem Mittelungsvolumen V_1 von denen in V_2 . Zudem seien die Felder ψ_1 und ψ_2 derart homogen, daß $R(\psi_1, \psi_2, V_1, V_2, \underline{x})$ nicht vom Ortsvektor \underline{x} abhängt.

4.2.2 Methode der direkten Integration

Gemäß der Definitionen (4-7,8) gilt:

$$R(\psi_1, \psi_2, V_1, V_2, \underline{x}) = \left\langle \left(\frac{1}{V_1} \int_{V_1} \psi_1(\underline{y}) dV(\underline{y}) \right) \cdot \left(\frac{1}{V_2} \int_{V_2} \psi_2(\underline{z} + \underline{x}) dV(\underline{z}) \right) \right\rangle \quad (4-9)$$

Hier wurden bei den zwei Integralen unterschiedliche Integrationsvariablen benutzt; dies erlaubt folgende Umformung:

$$R(\psi_1, \psi_2, V_1, V_2, \underline{x}) = \left\langle \frac{1}{V_1 \cdot V_2} \int_{V_1} \int_{V_2} \psi_1(\underline{y}) \cdot \psi_2(\underline{z} + \underline{x}) dV(\underline{y}) dV(\underline{z}) \right\rangle \quad (4-10)$$

Da sowohl die zeitliche Mittelung $\langle \rangle$, als auch die räumlichen Mittelungen lineare Operationen sind, dürfen sie vertauscht werden:

$$R(\psi_1, \psi_2, V_1, V_2, \underline{x}) = \frac{1}{V_1 \cdot V_2} \int_{V_1} \int_{V_2} R_{\psi_1, \psi_2}(\underline{y} - \underline{z} - \underline{x}) dV(\underline{y}) dV(\underline{z}) \quad (4-11)$$

mit

$$R_{\psi_1, \psi_2}(\underline{z}) = \langle \psi_1(\underline{x}) \cdot \psi_2(\underline{x} + \underline{z}) \rangle. \quad (4-12)$$

Beispielsweise ist für $\psi_1 = u_1$, $\psi_2 = u_1$, $R_{\psi_1, \psi_2}(\underline{z}) \equiv R_{11}(\underline{z})$ mit R_{11} gemäß (4-5). Nach dieser Methode wurden von Lilly für $V_1 = V_2 = V = h^3$, $\underline{z} = 0$ Korrelationen $\frac{1}{2} \langle u_i^2 \rangle$ berechnet [80]. Der Nachteil dieser Methode ist die Tatsache, daß bei dreidimensionalen Volumina sechsfache Integrale (numerisch) auszuwerten sind, was sehr aufwendig ist. Im folgenden Abschnitt wird in Anlehnung an Uberoi-Kovaszay [136] gezeigt, daß die Anzahl der unabhängigen Integrationsvariablen halbiert werden kann. Hierdurch können die Rechenzeiten zur numerischen Auswertung der Integrale von Stunden auf Sekunden reduziert werden.

4.2.3 Volumenkorrelations-Methode

Man kann die räumlichen Mittelwerte gemäß [136] verallgemeinert definieren als

$$\overline{\psi_1} = \iiint_{\infty} K_1(\underline{z}) \psi_1(\underline{z}) dV(\underline{z}), \quad (4-13)$$

mit

$$\iiint_{\infty} K_1(\underline{z}) dV(\underline{z}) = 1. \quad (4-14)$$

$K_1(\underline{s})$ ist hierbei eine (normierte) Gewichtsfunktion, von der allgemein lediglich zu fordern ist, daß sie für $|\underline{s}| \rightarrow \infty$ derart gegen Null geht, daß obiges Integral existiert. Damit der so definierte Mittelwert mit (4-8) übereinstimmt, muß offenbar gelten

$$K_1(\underline{z}) = \begin{cases} 0 & \underline{z} \notin V_1 \\ 1/V_1 & \underline{z} \in V_1 \end{cases}, \quad (4-15)$$

wobei der Bereich V_1 definiert ist als

$$|\underline{z}_i| \leq \frac{1}{2} H_i; \quad i = 1, 2, 3. \quad (4-16)$$

Neben diesen einfachen Gewichtsfunktionen können nach diesem Konzept jedoch auch Mittelwerte mit räumlich stetig variierenden Gewichten definiert und entsprechende Korrelationen berechnet werden. Dies ist im Zusammenhang mit der Auswertung von Messungen mittels der Laser-Doppler-Methode [15] von Bedeutung, wo $K(\underline{s})$ der Lichtintensitätsverteilung entspricht.

Wenn $K_2(\underline{s})$ analog zu $K_1(\underline{s})$ definiert ist, folgt:

$$R(\psi_1, \psi_2, V_1, V_2, \underline{z}) = \left\langle \iiint_{\infty} K_1(\underline{y}) \psi_1(\underline{y}) dV(\underline{y}) \right\rangle \cdot \left\langle \iiint_{\infty} K_2(\underline{z}) \psi_2(\underline{z} + \underline{z}) dV(\underline{z}) \right\rangle \quad (4-17)$$

Nach Vertauschung der (linearen) Mittelungsoperationen also:

$$R(\psi_1, \psi_2, V_1, V_2, \underline{x}) = \iiint_{\infty} \iiint_{\infty} K_1(\underline{y}) K_2(\underline{z}) R_{\psi_1, \psi_2}(\underline{y} - \underline{z} - \underline{x}) dV(\underline{y}) dV(\underline{z}) \quad (4-18)$$

mit R_{ψ_1, ψ_2} gemäß (4-12).

Mit der Substitution $\underline{z} = \underline{z} - \underline{y}$, $dV(\underline{z}) = dV(\underline{z})$ folgt:

$$R(\psi_1, \psi_2, V_1, V_2, \underline{x}) = \iiint_{\infty} \iiint_{\infty} K_1(\underline{y}) K_2(\underline{z} + \underline{y}) R_{\psi_1, \psi_2}(\underline{z} - \underline{x}) dV(\underline{y}) dV(\underline{z}) \quad (4-19)$$

Hier ist nun aber R_{ψ_1, ψ_2} unabhängig von \underline{y} und folglich kann ein Teilintegral, die sogenannte Volumenkorrelation $\varphi_{12}(\underline{z})$ extrahiert werden:

$$\varphi_{12}(\underline{z}) \equiv \iiint_{\infty} K_1(\underline{y}) K_2(\underline{z} + \underline{y}) dV(\underline{y})$$

und es gilt:

$$R(\psi_1, \psi_2, V_1, V_2, \underline{x}) = \iiint_{\infty} \varphi_{12}(\underline{z}) R_{\psi_1, \psi_2}(\underline{z} - \underline{x}) dV(\underline{z}) \quad (4-21)$$

$\varphi_{12}(\underline{z})$ ist eine allein von der Geometrie und relativen Orientierung der Volumina V_1 und V_2 abhängige Funktion, die oftmals analytisch berechnet werden kann. Damit ist also nur noch ein Integral (numerisch) auszuwerten, bei dem über halb so viele unabhängige Integrationsvariablen integriert werden muß, wie bei (4-11). Im Anhang 2 werden die für rechteckige Volumina geltenden Volumenkorrelationen berechnet.

4.3 Ergebnisse

Im folgenden werden für einige spezielle Korrelationen die aus den vorhergehenden Abschnitten folgenden Ergebnisse angegeben.

Es wird vorausgesetzt, daß $u_1(\underline{x}, t)$ ein turbulentes Geschwindigkeitsfeld sei, welches in Bereichen mit Durchmesser L_{iso} lokal isotrop sei, wobei $L_{iso} \approx 3 \Delta x_{max}$ ist (Δx_{max} : Maximum der Maschenkantenlängen $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$).

Das Energiespektrum $E(k)$ sei gleich dem Kolmogorov-Spektrum (4-4), so daß die dafür gültigen Korrelationen $R_{ij}(r)$ gemäß (4-5,6) für $|r| < L_{iso}$ gültig seien. Das Maschennetz sei kartesisch und äquidistant, jedoch die Maschenkanten Δx_i nicht alle gleich. Das Zeitinkrement Δt sei vernachlässigbar klein.

Unter Verwendung der Methoden des Kap. 4.2 werden folgende Größen berechnet:

$$a) \quad \langle \bar{v}_E^2 \rangle \equiv \left\langle \frac{1}{\prod_{i=1}^n \Delta x_i} \int_{-\frac{\Delta x_1}{2}}^{\frac{\Delta x_1}{2}} \dots \int_{-\frac{\Delta x_n}{2}}^{\frac{\Delta x_n}{2}} \frac{1}{2} [u_i(x_1, x_2, x_3, t) - \langle u_i \rangle]^2 dx_1 \dots dx_n \right\rangle \quad (4-22)$$

$$b) \quad {}_1D^2 \equiv \left\langle \delta_{x_j} \bar{u}_i (\delta_{x_j} \bar{u}_i + \delta_{x_i} \bar{u}_j) \right\rangle \quad (4-23)$$

$${}_2D^2 \equiv \left\langle \delta_{x_j} \bar{u}_i \overline{(\delta_{x_j} \bar{u}_i + \delta_{x_i} \bar{u}_j)^j} \right\rangle \quad (4-24)$$

$${}_3D^2 \equiv \frac{1}{2} \left\langle \overline{(\delta_{x_i} \bar{u}_j + \delta_{x_j} \bar{u}_i)^j} \right\rangle (1 - \delta_{[i][j]}) + 2 \left\langle (\delta_{x_j} \bar{u}_i)^2 \right\rangle \delta_{[i][j]} \quad (4-25)$$

$${}_4D^2 \equiv \frac{1}{2} \left\langle \overline{(\delta_{x_i} \bar{u}_j + \delta_{x_j} \bar{u}_i)^j} \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \left(\overline{(\delta_{x_i} \bar{u}_j + \delta_{x_j} \bar{u}_i)^j} \right)^2 \right\rangle \quad (4-26)$$

$$c) \quad FED \equiv \left(\langle \bar{u}_E^2 \rangle \cdot {}^jF \right)^{1/2} \left\langle \overline{(\delta_{x_i} \bar{u}_j + \delta_{x_j} \bar{u}_i)^j} \delta_{x_i} \bar{u}_j \right\rangle \quad (4-27)$$

Zu a) $\langle \bar{v}_E^2 \rangle$ ist die Verallgemeinerung des Volumenmittelwertes der kinetischen Energie der Schwingungsbewegung auf n-dimensionale Volumina. Spezialfälle sind $\langle \bar{v}_E^2 \rangle \equiv \langle \bar{v}_E^2 \rangle$; $\langle \bar{v}_E^2 \rangle \equiv \langle \bar{v}_E^2 \rangle$

Zu b) Die angegebenen Größen ${}_kD^2$, $k=1,2,3,4$ sind verschiedene Formen des mittleren Deformationsgeschwindigkeitsquadrates in Differenzenform. Die verwendete Notation wurde in Kap.3 erläutert. Der von Lilly [80] für $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = h$ berechnete Term $\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle$ ist mit ${}_1D^2$ identisch. Die von Lilly benutzte Näherung $\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right\rangle$ sowie die aufwendige Berechnungsmethode werden hier vermieden.

Zu c) Der Term FED entspricht der mittleren Energiedissipation, zu deren Annäherung FED benutzt werden wird. jF ist hier der Betrag einer Maschenoberfläche, deren Normale zur Koordinate x_j parallel ist; z.B. ${}^1F = \Delta x_2 \cdot \Delta x_3$.

Die Einzelheiten der Berechnungen sind in Anhang 1 angegeben. Die Ergebnisse sind nicht analytisch darstellbar, da die auftretenden Integrale numerisch ausgewertet werden müssen. Unter Bezug auf die in Anhang 2 wiedergegebenen FORTRAN-Unterprogramme E2, E3, D11, D12, D13, D14, FED1 ergibt sich:

$$\langle \frac{V_1}{E} \rangle = f_1 \cdot \langle \varepsilon \rangle^{2/3} \Delta x_1^{2/3} \cdot 0.45 \quad (4-28)$$

$$\langle \frac{V_2}{E} \rangle = f_1 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} h_2^{2/3} E2 \left(\frac{\Delta x_1}{h_2}, \frac{\Delta x_2}{h_2} \right) \quad (4-29)$$

$$h_2 = (\Delta x_1 \cdot \Delta x_2)^{1/2} \quad (4-30)$$

$$\langle \frac{V_3}{E} \rangle = f_1 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} h^{2/3} E3 \left(\frac{\Delta x_1}{h}, \frac{\Delta x_2}{h}, \frac{\Delta x_3}{h} \right) \quad (4-31)$$

$${}_1D^2 = f_2 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} h^{-4/3} D11 \left(\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h \right) \quad (4-32)$$

$${}_2D^2 = f_2 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} h^{-4/3} D12 \left(\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h \right) \quad (4-33)$$

$${}_3D^2 = f_2 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} h^{-4/3} D13 \left(\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h \right) \quad (4-34)$$

$${}_4D^2 = f_2 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} h^{-4/3} D14 \left(\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h \right) \quad (4-35)$$

$$FED = f_3 \langle \varepsilon \rangle FED1 \left(\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h \right) \quad (4-36)$$

$$h = (\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3)^{1/3} \quad (4-37)$$

$$f_1 = \alpha \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) 9/20 = 1.8083 \quad (4-38)$$

$$f_2 = \alpha \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) 18/55 = 1.3151 \quad (4-39)$$

$$f_3 = \left[\left(\alpha \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right)^3 \cdot 729/15125 \right]^{1/2} = 1.7685 \quad (4-40)$$

$$(\alpha = 1.5, \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2.67894)$$

Die numerische Auswertung der Integrale ergibt für spezielle Werte der Kantenlängen $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3$:

	$\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$ = 1 : 1 : 1	$\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3$ = 0.125 : 0.05 : 0.05	
E 3	0.746	0.825	
D 11	6.13	6.85	
D 12	6.73	7.35	
D 13	3.88	3.90	(4-41)
D 14	0.984	1.32	
FED1	5.30	5.39	

sowie

$$E2(1,1) = 0.6293 \quad (4-42)$$

$$E2(0.125/h_2, 0.05/h_2) = 0.6821 \quad h_2 = (0.125 \cdot 0.05)^{1/2} \quad (4-43)$$

Zum Vergleich: Lilly [80] gab folgende Ergebnisse an:

$$E3(1,1,1) = 0.761 \quad (4-44)$$

$$D11(1,1,1) = 7.66 \quad (4-45)$$

Während die kleine Abweichung zwischen (4-44) und dem Wert 0.746 aus (4-41) mit numerischen Ungenauigkeiten zu erklären ist, die bei der numerischen Bestimmung von sechsfachen Integralen verständlich ist, ist die Abweichung von (4-45) gegenüber dem Wert 6.13 gemäß (4-41) auch auf Lilly's fehlerhafte Annahme $\langle \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \rangle = \langle \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \rangle$ zurückzuführen.

Als allgemeines Ergebnis können wir feststellen: Unter Voraussetzung lokaler Isotropie und bei bekannten Korrelationen $R_{ij}(\underline{r}) \equiv \langle u_i(\underline{x} - \frac{1}{2}\underline{r}) u_j(\underline{x} + \frac{1}{2}\underline{r}) \rangle$ können auf rein formalem Wege zeitlich gemittelte Produkte von beliebig räumlich gemittelten Geschwindigkeiten berechnet werden.

In dem vorstehenden Kapitel wurden einige spezielle derartige Korrelationen berechnet. Hierbei wurden die aus dem Kolmogorov-Spektrum (4-4) folgenden Korrelationen (4-5,6) benutzt.

Ohne Veränderung der Methoden können die interessierenden Größen auch für beliebige andere Spektren berechnet werden. Die Annahme des Kolmogorov-Spektrums erlaubt jedoch die analytische Berechnung von R_{ij} , so daß eine zusätzliche numerische Integration entfällt.

5. Feinstrukturmodell

In diesem Kapitel soll die Näherung für die bei der Mittelung der Impulserhaltungsgleichung auftretenden, als Reynolds'sche Spannungen bezeichneten Flächenwerte von Produkten der auf Flächenmittelwerte bezogenen Schwankungsgeschwindigkeiten begründet werden. In kartesischen Koordinaten sind folgende Terme zu approximieren:

$\overline{u_i' u_j'}$; $i, j = 1, 2, 3$,
in zylindrischen Koordinaten sind es:

$$\begin{array}{ccc} \overline{v_x'^2} & \overline{v_\varphi' v_x'} & \overline{v_r' v_x'} \\ \overline{v_x' v_\varphi'} & \overline{v_\varphi'^2} & \overline{v_r' v_\varphi'} \\ \overline{v_x' v_r'} & \overline{v_\varphi' v_r'} & \overline{v_r'^2} \end{array} ,$$

sowie die infolge Volumen-Mittelung der Coriolis- und Zentrifugal-Beschleunigung entstehenden scheinbaren Spannungen:

$$\overline{v_\varphi' v_r'} \quad \overline{v_r' v_\varphi'} \quad \overline{v_r'^2}$$

Zunächst werden die in kartesischen Koordinaten auftretenden Korrelationen bestimmt. Die für zylindrische Koordinaten gültigen Terme werden sodann über einfache Analogien bestimmt. Zuvor jedoch sollen die von Deardorff [29,33] verwendeten Ansätze dargestellt und diskutiert werden. Hierbei werden einige grundsätzliche Mängel aufgezeigt, die in dem neuen Modell vermieden werden.

5.1 Boussinesq -Ansatz für Volumen-Reynolds-Spannungen nach Smagorinsky, Lilly und Deardorff

5.1.1 Übersicht und Definition des Ansatzes

Wenngleich, wie in Kap.2 diskutiert, der Boussinesq -Ansatz für die bei zeitlicher Mittelung entstehenden Reynolds-Spannungen nur für stationäre Grenzschichtströmungen geeignet ist, kann man annehmen, daß die bei der Mittelung über kleine Volumen bzw. Flächen entstehenden, instationären Reynolds-Spannungen, die von kleinerer Größenordnung sind, mit größerer Berechtigung^{*)} durch einen Boussinesq -Ansatz modelliert werden dürfen. Über einige Erfahrungen in älteren Arbeiten hierzu berichtet Lilly [81]. Hierbei handelt es sich um zweidimensionale Simulationen, die gerade deswegen jedoch nicht die erwarteten quasi

*) Diese Aussage wurde bereits in Kap.3.5 diskutiert.

randomen, turbulenten Strömungsfelder ergaben. Recht gute Ergebnisse brachte Deardorffs [27] zweidimensionale Simulation des turbulenten Impuls- und Wärmetransports. Dies mag daran liegen, daß das Temperaturfeld hier einen zusätzlichen Freiheitsgrad bildet, der die Entstehung randomer Felder erlaubt. Ein speziell für zweidimensionale Turbulenz geeignetes Modell hat Leith [82] vorgeschlagen. Ein Boussinesq -Ansatz für die Reynolds-Spannungen infolge der turbulenten Feinstruktur wurde erstmals von Smagorinsky [118] für die Simulation der großräumigen atmosphärischen Zirkulation verwendet. Lilly [80,81] schlug in Anlehnung an Smagorinsky folgenden Ansatz vor:

$$\overline{u_i' u_j'} = -\mu \overline{D_{ij}} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_e' u_e'} \quad (5-1)$$

mit der Deformationsgeschwindigkeit

$$D_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (5-2)$$

und der turbulenten Zähigkeit

$$\mu = (c_1 h)^2 \left[\frac{1}{2} (\overline{D_{ij}})^2 \right]^{1/2} \quad (5-3)$$

wobei c_1 , wie in Anhang 3 erläutert, bestimmt wird.

Es ist hierbei zu beachten, daß, abweichend von den in Kap.3 gezeigten Ableitungen, Smagorinsky, Lilly und Deardorff über Maschenvolumina V (Kanten Δx_i) gemittelte Reynolds-Spannungen

$$\overline{u_i' u_j'} \equiv \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \cdot \overline{u_j} \quad (5-4)$$

betrachten. Eine Mittelung über das Zeitintervall Δt ist hier nicht mit eingeschlossen. Lilly [80,81] begründet obigen Ansatz zudem nur für gleichseitige Maschen

$$h \equiv \Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 \quad (5-5)$$

Deardorff [29] hat diese Ableitungen auf seine ungleichseitigen Maschen (1-28) übertragen und dabei angenommen, daß die charakteristische Maschenlänge h gegeben ist durch

$$h = (\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3)^{1/3} \quad (5-6)$$

Die von Smagorinsky [118] und Lilly [80,81] verwendeten Methoden zur Bestimmung von c_1 , ihre Ergebnisse sowie Deardorffs Erfahrungswerte [29,33] hierzu sind in Anhang 3 dargestellt. Zudem wird dort über die Berechnung von c_1 nach den hier verwendeten Methoden berichtet.

5.1.2 Vereinfachungen, Schwächen und Widersprüche der bisher vorliegenden Theorien

Das Feinstrukturmodell, wie es von Lilly entwickelt und von Deardorff angewendet wurde, basiert auf folgenden Voraussetzungen:

- a) lokalisotrope (homogene) Turbulenz
- b) Gültigkeit des Kolmogorov-Spektrums
- c) Verwendung eines Boussinesq -Ansatzes anstelle der Integration von Erhaltungsgleichungen für $\overline{u_i' u_j'}$
- d) $\overline{u_i' u_j'}$ wird in deterministischer Weise aus dem gemittelten Geschwindigkeitsfeld berechnet, obwohl hier nur eine statistische Beziehung besteht [43]
- e) Verwendung einer Erhaltungsgleichung für $\overline{E'}$, die mit einer anderen Mittelungsoperation abgeleitet wird, als bei der Mittelung der Impulsgleichungen verwendet (siehe Kap.A3.2.1)
- f) $\langle (\overline{D_{ij}})^2 \rangle^{3/2} \approx \langle \overline{D_{ij}}^2 \rangle^{3/2}$, Gl.(A3-15)
- g) $\langle \epsilon' \rangle \approx \langle \epsilon \rangle$, Gl.(A3-16)
- h) $Re \gg 1$ (molekulare Zähigkeit wird von Deardorff in den Impulserhaltungsgleichungen vernachlässigt)
- i) Eine Theorie existiert nur für gleichseitige Maschenvolumina
- j) Lilly's Annahme für die Differenzenformeln zur Berechnung von $\overline{D_{ij}}$ (A3-29) entspricht nicht den von Deardorff verwendeten Differenzenformeln.
- k) Es wird fälschlicherweise angenommen, daß für die beiden Faktoren in (A3-14) die gleichen Differenzenformeln gültig sind; richtig ist die Berücksichtigung unterschiedlicher Formeln gemäß (A3-44).

Das von Deardorff [29] verwendete Modell besitzt folgende Schwächen und Widersprüche:

- a) $\overline{u_i' u_j'}$ ist zeitlich vollständig mit dem Geschwindigkeitsfeld korreliert, obwohl der Aufbau dieser Reynolds-Spannungen ein dynamischer Vorgang ist (genaugenommen durch eine instationäre Erhaltungsgleichung beschrieben [115]) und dadurch der Betrag von $\overline{u_i' u_j'}$ nur mit einer zeitlichen Verzögerung wächst, wenn das Quadrat der Deformationsgeschwindigkeit wächst.

- b) Die Annahme (5-6) für h kann nicht gelten, da danach für z.B. $\Delta x_1 \rightarrow 0$ auch $h \rightarrow 0$ folgt, während $\lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \overline{u_i' u_j'} = \overline{u_i' u_j'} \neq 0$ ist.
- c) $\overline{u_i' u_j'}$ ist isotrop, obwohl ein anisotropes Maschennetz verwendet wird.
- d) Bei Verwendung der Differenzenformeln (A3-33) zur Berechnung von $(\overline{D_{ij}})^2$ ist die turbulente Zähigkeit μ gemäß (5-3) auch dann positiv, wenn die Strömung laminar ist, wo also $\mu=0$ gelten sollte.
- e) Die Tatsache, daß $\langle \overline{u_i' u_j'} \rangle \neq 0$ ist, ist ein Widerspruch zur Voraussetzung lokalisotroper Turbulenz, wo alle $\langle \overline{u_i' u_j'} \rangle = 0$ sein müssen für $i \neq j$.
- f) Für $\Delta x_1 \rightarrow \infty$ und $\Delta x_2 \rightarrow \infty$ (z.B.) wächst $\mu \rightarrow \infty$. D.h. das Modell steht für diese Grenzfälle im Widerspruch zur Erfahrung. Es ist daher fraglich, ob das Modell für endliche Δx_i ausreichend genau ist.
- g) Das Kolmogorov-Spektrum muß bei der vorliegenden Theorie auch für sehr kleine Wellenzahlen $k \ll \frac{\pi}{h}$ gelten, da $\langle \overline{D_{ij}^2} \rangle$ sich gemäß (A3-20) aus einem Integral über $k^2 \cdot E(k)$ über alle Wellenzahlen kleiner $\frac{\pi}{h}$ ergibt. Wenngleich der Fehler wegen des Faktors k^2 klein sein dürfte, liegt hier dennoch eine Schwäche der Theorie vor.
- h) Das Konzept der Modellierung von Volumen-Korrelationen $\overline{u_i' u_j'}$ ist prinzipiell falsch; gemäß Kap.3 sind Flächenmittelwerte zu approximieren.

In den folgenden Kapiteln soll ein verbessertes Feinstrukturmodell abgeleitet werden, daß alle diese Schwächen und die meisten Voraussetzungen vermeidet. Lediglich die Voraussetzungen a) bis d) sind für die Aufstellung des verbesserten Modells notwendig, können jedoch später in ihren Auswirkungen teilweise abgeschwächt werden.

5.2 Verbessertes Feinstrukturmodell in kartesischen Koordinaten

5.2.1 Forderungen an das Feinstrukturmodell und Auftrennung in lokalisotrope und inhomogene Anteile

Die betrachteten Kanalströmungen sind ausgeprägt inhomogene und anisotrope turbulente Strömungen. Die Annahme der Lokalisotropie kann man zwar gemäß Anhang 1

für ausreichend große Maschenzahlen ($KM > 30$) als gültig betrachten; dennoch ist es wünschenswert, ein Modell zu haben, das auch bei inhomogenen Strömungen noch gültig ist, wenn diese Grenze der Maschenzahlen nicht hinreichend überschritten werden kann. Ein derartiges Modell muß folgende Grenzbedingungen erfüllen:

- a) Der Anteil der Reynolds-Spannungen $\langle \overline{u_i' u_j'} \rangle$, der aufgrund der Annahme lokalisotroper Turbulenz berechnet wird, muß konsequentermaßen die für diese Voraussetzung charakteristische Bedingung

$$\langle \overline{u_i' u_j'} \rangle = 0 \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j \quad (5-7)$$

erfüllen.

- b) In Anbetracht der Inhomogenität ($\langle u_1(x_3) \rangle \neq \text{const}$) muß andererseits natürlich für das gesamte Modell gelten:

$$\langle \overline{u_1' u_3'} \rangle \neq 0, \quad j = 1, 3 \quad (5-8)$$

- c) Das verwendete Turbulenzmodell sollte im Grenzfall sehr großer Maschen insofern mit der Erfahrung übereinstimmen, als es dann in einfachere, bekannte Modelle übergehen soll, beispielsweise soll es in das Prandtl'sche Mischungswegmodell übergehen:

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow \infty \\ \Delta x_2 \rightarrow \infty}} \langle \overline{u_1' u_2'} \rangle = - L^2 \left| \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x_3} \right| \cdot \frac{\partial \langle u_2 \rangle}{\partial x_3} \quad (5-9)$$

mit L gemäß (2-8).

- d) Für den entgegengesetzten Grenzfall $\Delta x_k \rightarrow 0 \ (k=1,2,3)$ soll selbstverständlich gelten $\langle \overline{u_i' u_j'} \rangle \rightarrow 0$.

(5-10)

- e) Für $\nu \rightarrow \infty$, d.h. für laminare Strömung, soll $\overline{u_i' u_j'}$ verschwinden.

Zur Erstellung des Feinstrukturmodells gemäß dieser Forderungen wird das turbulente Strömungsfeld aufgeteilt in

$$u_i \equiv u_i'' + \overline{u_i}^p; \quad p \equiv p'' + \overline{p}^p \quad (5-11)$$

wobei \overline{y}^p der "Periodenmittelwert" von y ist:

$$\overline{y}^p \equiv \lim_{\substack{X_1 \rightarrow \infty \\ X_2 \rightarrow \infty}} \frac{1}{X_1 \cdot X_2} \int_0^{X_1} \int_0^{X_2} y(x_1, x_2, x_3, t) dx_1 dx_2 = \overline{y}^p(x_3, t) \quad (5-12)$$

Analog werden die Reynolds-Spannungen aufgeteilt:

$$\overline{u_i' u_j'} = (\overline{u_i' u_j'})'' + \overline{u_i' u_j'}^P \quad (5-13)$$

Lediglich bei der Erstellung des Modells für $(\overline{u_i' u_j'})''$ werden die Voraussetzungen, die mit der Lokalisotropie zusammenhängen, angenommen. $(\overline{u_i' u_j'})''$ werden daher die "lokalisotropen" Reynolds-Spannungen genannt. Die Restterme $\overline{u_i' u_j'}^P$ werden die "inhomogenen" Reynolds-Spannungen genannt. Im folgenden wird zunächst ein Modell zur Berechnung des lokalisotropen Anteils und sodann eines für den inhomogenen Anteil abgeleitet.

5.2.2 Modell für den lokalisotropen Anteil der Reynolds-Spannungen

In diesem Abschnitt wird das Modell für $(\overline{u_i' u_j'})''$ gemäß (5-13) abgeleitet.

5.2.2.1 Voraussetzungen zur Bestimmung von $(\overline{u_i' u_j'})''$

Für die Ableitung des lokalisotropen Feinstrukturmodells werden folgende Voraussetzungen getroffen. Einige werden in ihrer vollen Strenge in Kap.5.2.2.5 eingeschränkt.

- Die Turbulenz sei lokalisotrop bezüglich eines Bereichs mit einem Durchmesser von ca. 3 Maschenkantenlängen h (vergl. Def. in Kap.4.1).
- Die Turbulenz besitzt ein Energiespektrum $E(k)$, das für Wellenzahlen $k > \frac{1}{2} \frac{\pi}{h}$ durch das Kolmogorov-Spektrum (4-4) gegeben ist,
- Die Reynolds-Spannungen lassen sich durch einen geeigneten Ansatz ähnlich dem Boussinesq -Ansatz für die bei zeitlicher Mittelung auftretenden Reynolds-Spannungen beschreiben. Dieser Ansatz wird in Kap.5.2.2.3 begründet.
- Die Reynolds-Spannungen sind in deterministischer Weise aus dem gemittelten Geschwindigkeitsfeld und der kinetischen Energie der Schwankungsbewegung bestimmbar. (Vergl. Kap.5.2.2.5.3)
- Da mit der vorliegenden Theorie Tripelkorrelationen nicht berechenbar sind ^{*)}, werden folgende Näherungen als gültig betrachtet:

$$\langle (F E')^{1/2} (\overline{u_i' u_j'} + \overline{u_j' u_i'}) \delta_{x_j} \rangle = \sigma_1 \langle (F E')^{1/2} \rangle \langle (\overline{u_i' u_j'} + \overline{u_j' u_i'}) \delta_{x_j} \rangle \quad (5-14)$$

$$\langle (E')^{3/2} \rangle = \sigma_2 \langle E' \rangle^{3/2} \quad (5-15)$$

*) wenn nicht zusätzliche Experimente berücksichtigt werden sollen.

mit

*)

$$\sigma_1 \approx 1, \quad \sigma_2 \approx 1 \quad (5-16)$$

(vergl. Kap. 5.2.2.5.3)

f) Das Maschennetz sei äquidistant und kartesisch jedoch seien die Maschenkantenlängen Δx_i nicht notwendig alle gleich.

g) Die Mittelung über Δt sei vernachlässigbar (vergl. Kap. 5.2.2.5.1).

5.2.2.2 Grundgleichungen für lokalisotrope Turbulenz

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß das lokale Schwankungsfeld bei lokalisotroper Turbulenz im wesentlichen den gleichen Grundgleichungen gehorcht wie das gesamte Strömungsfeld, ohne daß zusätzliche Terme, die die Wechselwirkung zwischen dem Schwankungs- und dem gesamten Strömungsfeld beschreiben, berücksichtigt werden müssen.

Wir spalten die Felder u_i und p in ihren periodischen Mittelwert $\langle u_i \rangle, \langle p \rangle$ und die Abweichungen u_i'', p'' gemäß (5-11) auf. Sodann bilden wir von den Massen- und Impuls-Erhaltungsgleichungen den periodischen Mittelwert und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i \rangle &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i'' u_j'' \rangle) & \end{aligned} \quad (5-17)$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle p \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_j \rangle \right] \right) + \tau_x \quad (5-18)$$

Subtrahieren wir diese gemittelten Gleichungen von den Ausgangsgleichungen, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_i'' = 0 \quad (5-19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u_i'' + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i'' u_j'') = & - \frac{\partial}{\partial x_j} p'' + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_i'' + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j'' \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i'' u_j'' \rangle - u_j'' \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \langle u_j \rangle \frac{\partial u_i''}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (5-20)$$

Nun sind innerhalb eines Bereiches mit Durchmesser L_{iso} wegen der vorausgesetzten lokalen Isotropie die folgenden Größen in derartigen Bereichen vernachlässigbar [103]:

*) Bezüglich der Zulässigkeit dieser Näherungen siehe Kap. 10.4.6.

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u_i'' u_j''} \right) \approx 0 ; \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i''} \approx 0 \quad (5-21)$$

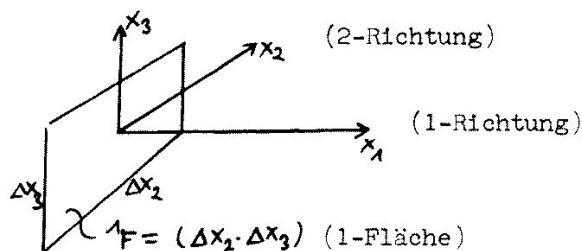
Wenn zudem der Beobachter sich mit der mittleren Geschwindigkeit $\overline{u_j}$ bewegt, so ist auch der letzte Term in (5-20) vernachlässigbar. Diese Annahme ist zulässig, da sie sich nur auf die Randbedingungen auswirkt (vergl. Kap. 7.2), die innerhalb des Bereiches lokaler Isotropie unwesentlich sind. Damit reduzieren sich die Erhaltungsgleichungen für Impuls und Masse des Schwankungsfeldes u_i'' , p'' auf die Grundgleichungen (mit $\overline{P_x} = 0$) selber. Folglich sind alle daraus abgeleiteten Beziehungen, insbesondere die Erhaltungsgleichung für \overline{E} (3-31), gültig, wenn nur überall u_i, p durch u_i'', p'' ersetzt und $\overline{P_x} = 0$ gesetzt wird.

In den folgenden Unterkapiteln dieses Abschnittes 5.2.2 wird der Kürze wegen u_i, p anstelle von u_i'', p'' geschrieben.

5.2.2.3 Begründung des verbesserten Boussinesq -Ansatz

5.2.2.3.1 Modellvorstellung und Ansatz

In Kap. 3.3 wurde gezeigt, daß durch die Mittelung der Impulserhaltungsgleichungen nicht Volumen-, sondern Flächenmittelwerte von Geschwindigkeitschwankungs-Produkten $\overline{u_i' u_j'}$ auftreten. In diesem Abschnitt wird ein Modell erläutert, aufgrund dessen hierfür ein Boussinesq -Ansatz geeignet definiert werden kann. Hierzu betrachten wir speziell $\overline{u_1' u_2'}$ mit den Bezeichnungen der folgenden Skizze



Die Terme $\overline{u_1' u_2'}$ entstanden infolge Mittelung von $u_1 \cdot u_2$. Das Produkt $u_1 \cdot u_2$ beschreibt einerseits den konvektiven Transport des Impulses (je Masseneinheit) in 1-Richtung infolge der Konvektion in 2-Richtung und gleichzeitig den des Impulses in 2-Richtung infolge Konvektion in 1-Richtung. Die erste Betrachtungsweise gilt für die 1-Komponente der Impulserhaltungsgleichungen und die zweite für die 2-Komponente. Der Flächenmittelwert von $u_1 \cdot u_2$ über die 1-Fläche, also $\overline{u_1 u_2}$ tritt gemäß (3-14) nur bei der zweiten Gleichungs-Komponente auf. Das über die 1-Fläche gemittelte Produkt der Schwankungsgeschwindigkeiten

$$\overline{u_1' u_2'} \equiv \overline{u_1 u_2} - \overline{u_1} \cdot \overline{u_2} \quad (5-22)$$

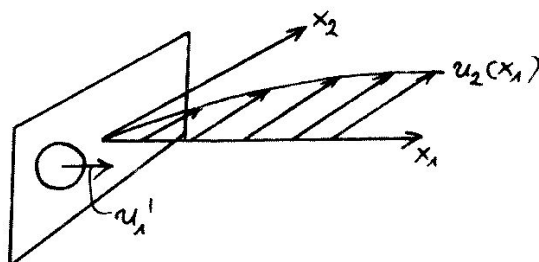
ist daher der konvektive Transport der zweiten Impulskomponente in 1-Richtung infolge der Schwankungsbewegung. $\overline{u_1' u_2'}$ ist also interpretierbar als die an der 1-Fläche angreifende Reynolds-Spannung (je Masseneinheit) in der 2-Richtung. Nur der durch die Schwankungsbewegung hervorgerufene Impulstransport braucht hier betrachtet zu werden, da $\overline{u_1' u_2'}$ explizit durch die gemittelten Gleichungen beschrieben wird.

Diesen Anteil des konvektiven Impulstransportes kann man sich vorstellen als den Impulstransport mittels kleiner Turbulenzballen. Diese Turbulenzballen müssen so klein sein, daß ihre Bewegung keinen Beitrag zu den gemittelten Geschwindigkeiten liefert, da ihre Bewegung sonst bereits durch die gemittelten Geschwindigkeitsfelder beschrieben und in den gemittelten Gleichungen erfaßt wäre. Die Querschnittsfläche der Turbulenzballen muß also so klein sein, daß zumindest zwei etwa gleich große Turbulenzballen entgegengesetzter Schwankungsrichtung in der 1-Fläche Platz haben; ihr Durchmesser ${}^1\ell$ erfüllt also die Bedingung

$$({}^1\ell)^2 \lesssim \frac{1}{2} {}^1F \quad (5-23)$$

Andererseits gilt nicht ${}^1\ell^2 \ll {}^1F$, da der Anteil der kinetischen Energie der Turbulenzballen mit sinkendem Durchmesser gemäß Voraussetzung b) (Kolmogorov-Spektrum) stark abnimmt. Der von diesen Turbulenzballen transportierte Impulsbetrag kann proportional zu $({}^1\ell)^n$ gesetzt werden, wobei n ein noch zu bestimmender Exponent ist.

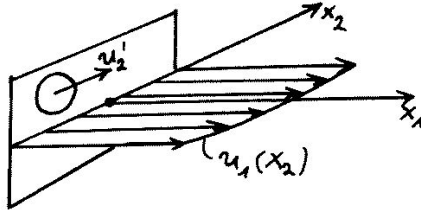
Gemäß obiger Interpretation der Bedeutung von $\overline{u_1' u_2'}$ müssen wir uns fragen, welche Beiträge die Bewegung der Turbulenzballen in 1- und 2-Richtung zur Konvektion der zweiten Impulskomponente liefern. Eine Bewegung der Ballen in 1-Richtung liefert einen Impulstransport in 2-Richtung, der in erster Näherung proportional zu dem Gradienten der Geschwindigkeit u_2 in 1-Richtung ist. Dies verdeutlicht folgende Skizze:



Eine Bewegung des Ballens mit positivem u_1' liefert einen negativen Impulstransport bei positivem Gradienten von $\partial u_2 / \partial x_1$ und umgekehrt, also

$$\overline{u_1' u_2'} \sim - \ell^n |u_1'| \partial u_2 / \partial x_1, \quad (5-24)$$

mit positivem Proportionalitätsfaktor. Eine Bewegung der kleinen Turbulenzballen in 2-Richtung mit u_2' liefert einen Impulstransport in 2-Richtung, der wieder in erster Näherung zu dem Gradienten der Geschwindigkeit u_1 in 2-Richtung proportional ist, wobei die gleichen Vorzeichenüberlegungen gelten wie oben:



$$\overline{u_1' u_2'} \sim - \ell^n |u_2'| \partial u_1 / \partial x_2 \quad (5-25)$$

Gemäß Voraussetzung a) (lokale Isotropie) kann gesetzt werden:

$$|u_1'| \sim |u_2'| \sim (\overline{E'})^{1/2} \equiv \left[\frac{1}{2} (\overline{u_i'^2} - \overline{u_i'^4}) \right]^{1/2} \quad (5-26)$$

Faßt man nun die Beiträge beider Schwankungskomponenten zusammen, ersetzt die unbekannten Gradienten durch entsprechende Differenzenquotienten und beachtet, daß gelten muß

$$\overline{u_1' u_2'} = \overline{u_2' u_1'}, \quad (5-27)$$

so folgt:

$$\overline{u_1' u_2'} = - c_2 (\overline{F})^{1/2} (\overline{E'})^{1/2} (\delta_{x_1} \overline{u_2} + \delta_{x_2} \overline{u_1}). \quad (5-28)$$

Hierbei wurde der bisher noch unbestimmte Exponent n zu Eins festgelegt, da dann der Proportionalitätsfaktor c_2 eine dimensionslose, positive Konstante ist. Auf andere Indices verallgemeinert ergibt sich:

$$\overline{u_i' u_j'} = - c_2 (\overline{F})^{1/2} (\overline{E'})^{1/2} (\delta_{x_i} \overline{u_j} + \delta_{x_j} \overline{u_i}) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_\theta' u_\theta'} \quad (5-29)$$

Der letzte Summand wurde gemäß [53, S.21] hinzugefügt, um einen positiven Betrag für $\delta_{ij} \overline{u_i' u_j'}$ trotz

$$\delta_{ij} (\delta_{x_i} \overline{u_j} + \delta_{x_j} \overline{u_i}) = 2 \delta_{x_i} \overline{u_i} = 0 \quad (5-30)$$

zu erzwingen.

Die Analogie zum Newton'schen Stoffgesetz wird deutlich, wenn man als "turbulente kinematische Zähigkeit"

$$\mu \equiv c_2 (j_F \overline{E'})^{1/2} \quad (5-31)$$

definiert.

5.2.2.3.2 Berechnung der Konstanten c_2

Eine Bestimmungsgleichung der Konstanten c_2 erhält man durch Einsetzen des Ansatzes (5-29) in die Erhaltungsgleichung der kinetischen Energie der Schwankungsgeschwindigkeiten in einem Volumenelement (3-31):

$$\frac{\partial \overline{E'}}{\partial t} = - \overline{j_{u'_i u'_j}}^j \delta_{x_j} \overline{u'_i} - \overline{v_{\varepsilon'}} - \text{Konv} + \text{Diff}, \quad (5-32)$$

mit
$$\overline{v_{\varepsilon'}} \equiv \overline{v_{\varepsilon}} - \nu \left[\delta_{x_j} \overline{u'_i} (\delta_{x_j} \overline{u'_i} + \delta_{x_i} \overline{u'_j}) \right] \quad (5-33)$$

und Konv.bzw.Diff.als Abkürzung für die hier nicht im Detail interessierenden Terme II und IV der Gl.(3-31). Für $\overline{j_{u'_i u'_j}}$ wird Gl.(5-29) eingesetzt. Hierbei verschwindet der Zusatzterm $\frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_i u'_j u'_k}$ wegen (5-30). Wird nun zeitlich gemittelt, so folgt für stationäre Turbulenz:

$$\left\langle \frac{\partial \overline{E'}}{\partial t} \right\rangle = 0 = \left\langle c_2 (j_F \overline{E'})^{1/2} \cdot \overline{(\delta_{x_i} \overline{u'_j} + \delta_{x_j} \overline{u'_i})^j} \delta_{x_j} \overline{u'_i} \right\rangle - \langle \overline{v_{\varepsilon'}} \rangle - \langle \text{Konv} \rangle + \langle \text{Diff} \rangle. \quad (5-34)$$

Die beiden letzten Summanden verschwinden bei der vorausgesetzten homogenen Turbulenz. Sie verschwinden aber auch bei einer Kanalströmung, wenn zusätzlich zu der zeitlichen Mittelung noch über den gesamten Kanal gemittelt wird, da die kinetische Energie und ihr Gradient an der Wand verschwinden. Damit haben wir folgende Bestimmungsgleichung für c_2 :

$$c_2 = \frac{\langle \overline{v_{\varepsilon'}} \rangle}{\left\langle (j_F \overline{E'})^{1/2} \overline{(\delta_{x_i} \overline{u'_j} + \delta_{x_j} \overline{u'_i})^j} \delta_{x_j} \overline{u'_i} \right\rangle} \quad (5-35)$$

Die Auswertung des Nenners kann nur erfolgen, wenn gesetzt wird:

$$\begin{aligned} & \left\langle (j_F \overline{E'})^{1/2} (\delta_{x_i} \overline{u'_j} + \delta_{x_j} \overline{u'_i}) \delta_{x_j} \overline{u'_i} \right\rangle \\ & \equiv \sigma_1 \left\langle j_F \overline{E'} \right\rangle^{1/2} \cdot \left\langle \overline{(\delta_{x_i} \overline{u'_j} + \delta_{x_j} \overline{u'_i})^j} \delta_{x_j} \overline{u'_i} \right\rangle \end{aligned} \quad (5-36)$$

Wobei gemäß Voraussetzung e) zunächst $\sigma_1 = 1$ gesetzt wird. Diese Annahme ist notwendig, weil mit der vorliegenden Theorie die auftretenden Korrelationen von Geschwindigkeitstripeln nicht berechenbar sind. Im Gegensatz zu der bei

Deardorff notwendigen Annahme (A3-15) kann hier zwar mit geringeren Fehler angenommen werden, daß $(\bar{\epsilon})^{1/2}$ nur schwach mit dem Deformationsgeschwindigkeitsquadrat korreliert ist, jedoch dürfte wegen

$$\langle (\bar{\epsilon})^{1/2} \rangle > \langle \bar{\epsilon} \rangle^{1/2} \quad (5-37)$$

$$\sigma_1 > 1$$

sein.

Damit ergibt sich c_2 aus

$$c_2 = \frac{\langle \epsilon \rangle - \nu \langle (\delta x_j \dot{u}_i + \delta x_i \dot{u}_j) \cdot \delta x_j \dot{u}_i \rangle}{\sigma_1 \langle F \bar{\epsilon} \rangle^{1/2} \langle (\delta x_j \dot{u}_i + \delta x_i \dot{u}_j) \cdot \delta x_j \dot{u}_i \rangle} \quad (5-38)$$

Unter Berücksichtigung der Ergebnisse des Kap.4.3(4-32) und (4-36) folgt:

$$c_2 = \frac{1 - c_v}{\sigma_1 \cdot f_3 \cdot F \bar{\epsilon} D_1 (\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h)} \quad (5-39)$$

mit $h = (\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3)^{1/3}$

und

$$c_v = \left(\frac{\nu^3}{h^4 \langle \epsilon \rangle} \right)^{1/3} f_2 D_{11} (\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h) \quad (5-40)$$

Zahlenmäßig ergibt sich für $\alpha = 1,5$, $\sigma_1 = 1$.

$$c_2 = \frac{\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3 = 1 : 1 : 1}{(1 - 7.78 \left(\frac{\nu^3}{h^4 \langle \epsilon \rangle} \right)^{1/3}) 0.1431} \quad \left| \quad \frac{\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3 = 0.125 : 0.05 : 0.05}{(1 - 8.70 \left(\frac{\nu^3}{h^4 \langle \epsilon \rangle} \right)^{1/3}) 0.1409} \right. \quad (5-41)$$

Für sehr hohe Reynolds-Zahlen kann das Korrekturglied c_v vernachlässigt werden. Bei endlichen Reynolds-Zahlen ist c_v so wie h und $\langle \epsilon \rangle$ vom Ort abhängig. Wegen der geringen Größenordnung kann $\langle \epsilon \rangle$ ohne wesentlichen Fehler durch folgende Näherung ersetzt werden (vergl.1-36)):

$$\langle \epsilon \rangle \approx \frac{\nu}{2} \langle \epsilon \rangle = 2 \frac{\nu}{\langle u_1 \rangle} \quad (5-42)$$

und also

$$c_v = \left(\frac{\nu^3}{h^4 \cdot 2 \frac{\nu}{\langle u_1 \rangle}} \right)^{1/3} f_2 D_{11} (\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h) \quad (5-43)$$

5.2.2.4 Berechnung der kinetischen Energie $\overline{E'}$

Ausgehend von der exakten Gleichung (3-31) (in der gem. Kap. 5.2.2.2 u_1 wie u_j zu lesen ist), wird folgende Näherungsgleichung angenommen:

$$\frac{\partial \overline{E'}}{\partial t} = - \underbrace{\delta x_j}_{\text{I}} \left(\underbrace{j \overline{u}_j}_{\text{II}} \underbrace{j c_5}_{\text{III}} \overline{E'} \right) + \underbrace{P}_{\text{III}} + \underbrace{\delta x_j}_{\text{IV}} \left[\underbrace{(\nu + j c_6)}_{\text{IV}} \underbrace{(\overline{E'})^{1/2}}_{\text{IV}} \underbrace{\delta x_j}_{\text{IV}} \overline{E'} \right] - \underbrace{S}_{\text{V}} \quad (5-44)$$

Die römischen Ziffern I bis V kennzeichnen hier die Terme wie in Kap. 3.4.

Für P und S, die Produktions- bzw. Senkenterme, wird gesetzt:

$$P = c_4 h D^2 (\overline{E'})^{1/2} \quad (5-45)$$

$$S = c_3 (\overline{E'})^{3/2} / h - \nu c_8 D^2 \quad (5-46)$$

D^2 ist eine Differenzenapproximation für das Deformationsgeschwindigkeitsquadrat D_{ij}^2 ,

$$D_{ij}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2, \quad (5-47)$$

deren genaue Form noch diskutiert wird.

Durch Vergleich der Näherung mit der exakten Gleichung ergeben sich folgende Bestimmungsgleichungen für die Konstanten $c_3, c_4, j c_5, c_8$:

$$c_3 = \frac{\langle \epsilon \rangle \cdot h}{\langle (\overline{E'})^{3/2} \rangle} \quad (5-48)$$

$$c_4 = \frac{\langle -j \overline{u}_i \overline{u}_j \delta x_j \dot{\overline{u}}_i \rangle}{h \langle (\overline{E'})^{1/2} D^2 \rangle} \quad (5-49)$$

$$j c_5 = \langle j \overline{E'} \rangle / \langle \overline{E'} \rangle \quad (5-50)$$

$$c_8 = \frac{\langle \delta x_j \dot{\overline{u}}_i (\delta x_j \dot{\overline{u}}_i + \delta x_i \dot{\overline{u}}_j) \rangle}{\langle D^2 \rangle} \quad (5-51)$$

Für die Konstante $j c_6$ kann eine derartige Bestimmungsgleichung nicht angegeben werden. Sie wäre auch weitgehend wertlos, da die darin auftretenden Korrelationen nicht berechenbar sind, zumal sie im zeitlichen Mittel verschwinden. Da hier die Energie stets als Flächenmittelwert auftritt, wird zunächst gesetzt

$$j c_6 = j c_5 \cdot c_7 \quad (5-52)$$

Die Konstante c_7 kann nicht aus der Theorie heraus bestimmt werden. Ihr Wert dürfte wie für die zeitlich gemittelten kinetischen Energien (Konstante a_3 in Tab.1) im Bereich

$$0 < c_7 \leq 1$$

liegen.

Gemäß Kap.2.6 spielen die Konstanten in den Energie-Diffusions-Termen keine entscheidende Rolle. Der Wert

$$c_7 = 0.3 \quad (5-53)$$

hat sich in den praktischen Rechnungen (vergl.Kap.10) bewährt. Für die Berechnung von $\overline{u_i' u_j'}$ in (5-49) wird der Ansatz (5-29) eingesetzt:

$$c_4 = \frac{c_2 \langle (j_F j_E^-)^{1/2} (\delta_{x_i} \overline{u_j} + \delta_{x_j} \overline{u_i})^j \delta_{x_j} \overline{u_i} \rangle}{h \langle (j_E^-)^{1/2} D^2 \rangle} \quad (5-54)$$

Bei den Bestimmungsgleichungen für c_3 und c_4 treten nun noch Tripelkorrelationen auf, die mit der vorliegenden Theorie nicht berechenbar sind. Es wird daher gemäß Voraussetzung e) vereinfacht zu:

$$c_3 = \frac{\langle \varepsilon \rangle \cdot h}{\sigma_2 \langle j_E^- \rangle^{3/2}} \quad (5-55)$$

$$c_4 = \frac{\langle j_F j_E^- \rangle^{1/2} \langle (\delta_{x_i} \overline{u_j} + \delta_{x_j} \overline{u_i}) \delta_{x_j} \overline{u_i} \rangle}{h \langle (j_E^-)^{1/2} \rangle \langle D^2 \rangle} c_2 \quad (5-56)$$

Bei c_4 dürfte eine Korrektur (σ -Faktor) überflüssig sein, da im Zähler und Nenner etwa der gleiche Fehler auftritt.

Für D^2 werden zwei verschiedene Differenzenformen vorgeschlagen:*)

$$a) \quad D^2 = {}_3D^2 \equiv \frac{1}{2} \overline{(\delta_{x_i} \overline{u_j} + \delta_{x_j} \overline{u_i})^2} (1 - \delta_{[J][J]}) + 2 (\delta_{x_j} \overline{u_i})^2 \delta_{[J][J]} \quad (5-57)$$

Diese Formel entspricht der von Deardorff verwendeten (Gl.A3-36). Sie hat den Nachteil, daß zur quantitativen Bestimmung von $\langle D^2 \rangle$ ähnlich wie in Kap. A3.2.2 ein Integral der Form

$$\int_0^{\pi/h} k^2 E(k) dk$$

zu bilden ist, also auch über kleine Wellenzahlen zu integrieren ist, wo $E(k)$ nicht mit dem vorausgesetzten Kolmogorov-Spektrum übereinstimmt.

Subtrahiert man jedoch von ${}_3D^2$ einen dem Deformationsgeschwindigkeitsquadrat entsprechenden Term, der aus Differenzen über doppelt so große Maschenweiten hinweg gebildet wird und der also durch ein Integral der Form

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi/h} k^2 E(k) dk$$

bestimmt ist, so kann man die Integration über Wellenzahlen $k < \frac{1}{2}\pi/h$ vermeiden und kommt mit der in Kap.5.2.2.1 genannten Voraussetzung b) aus. Eine derartige Formel ist:

*) siehe Anhang 7

b)

$$D^2 = {}_4D^2 \equiv \frac{1}{2} \left(\overline{\delta x_j \cdot \tilde{u}_i} + \overline{\delta x_i \cdot u_j} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\overline{\delta x_j \cdot \tilde{u}_i} + \overline{\delta x_i \cdot u_j} \right)^2 \quad (5-58)$$

Ein weiterer Vorteil dieser Formel (die übrigens auch in (5-3) von Vorteil wäre) ist, daß die kinetische Schwankungsenergie - entsprechend der Physik - stärker von den Vorgängen bei kleinen Wellenzahlen entkoppelt wird. Nachteilig bei dieser Formel ist jedoch der größere numerische Aufwand. Das Verhältnis $\langle {}_4D^2 \rangle / \langle {}_3D^2 \rangle$ kann abgeschätzt werden zu

$$\frac{\langle {}_4D^2 \rangle}{\langle {}_3D^2 \rangle} = \frac{\int_0^{\pi/h} k^2 E(k) dk}{\int_0^{\pi/h} k^2 E(k) dk} \quad (5-59)$$

wofür mit $E(k) = \alpha \langle \epsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3}$ folgt:

$$\langle {}_4D^2 \rangle / \langle {}_3D^2 \rangle = 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{4/3} \approx 0.602 \quad (5-60)$$

Die genauere Berechnung gemäß Anhang 2 liefert für $\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3 = 1 : 1 : 1$:

$$\langle {}_4D^2 \rangle / \langle {}_3D^2 \rangle = 0.237 \quad (5-61)$$

Dies zeigt, daß die in Kap. A3.2.2 verwendete Näherung zu großen Fehlern führen kann.

Unter Verwendung der Ergebnisse des Kap. 4.3 lassen sich die Konstanten quantitativ bestimmen:

$$C_3 = \frac{1}{\sigma_2 \cdot [f_1 \cdot E_3(\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h)]^{3/2}} \quad (5-62)$$

$$C_4 = \frac{C_2 \cdot FED1(\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h)}{[E_3(\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h)]^k \cdot D1R(\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h)} \quad (5-63)$$

$k = 3$ für ${}_3D^2$
 $k = 4$ für ${}_4D^2$

$${}_jC_5 = \frac{\bar{E}_2(\Delta x_m, \Delta x_n)}{E_3(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)} \quad m \neq n \neq j \quad (5-64)$$

$${}_jC_6 = {}_jC_5 \cdot C_7 \quad ; \quad C_7 \approx 0.3 \quad (5-65)$$

$$C_8 = \frac{D11(\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h)}{D1R(\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h)} \quad (5-66)$$

$k = 3$ für ${}_3D^2$
 $k = 4$ für ${}_4D^2$

Für $\alpha = 1.5$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ergeben sich folgende Zahlenwerte

c	k	$\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3 = 1:1:1$	$\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3 = .125:0.05:0.05$
c_3		1.022	0.884
c_4	3	$1.6301 \cdot c_2$	$1.57 \cdot c_2$
c_4	4	$6.87 \cdot c_2$	$4.80 \cdot c_2$
1c_5		0.8283	0.6135
2c_5		0.8283	0.9147
3c_5		0.8283	0.9147
c_8	3	1.573	1.747
c_8	4	6.63	5.344

(5-67)

Bei bekannten $\overline{v_{E'}}^2$ werden die Werte der in (5-29) benötigten Flächenmittelwerte $\overline{j_{E'}}$ berechnet aus:

$$\overline{j_{E'}} = j_{CS} \cdot \overline{v_{E'}}^2 \quad (5-68)$$

Für den zeitlichen Mittelwert der turbulenten Zähigkeit $\overline{j_{\mu}}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle \overline{j_{\mu}} \rangle &= c_2 \langle (j_F \overline{j_{E'}})^{1/2} \rangle \\ &\approx c_2 j_F^{1/2} \langle \overline{v_{E'}}^2 \rangle^{1/2} \\ &\sim h^{4/3} \langle \epsilon \rangle^{1/3} \quad (\text{wegen 4-29}) \end{aligned} \quad (5-69)$$

D.h., die aus diesem Modell folgende turbulente Zähigkeit geht bei gegebener Dissipation (entsprechend der zugeführten Druckleistung) schneller als die Maschenkanten h gegen Null.

Außerdem sieht man, daß für die von Deardorff [29] verwendeten Maschen die turbulenten Zähigkeiten sich wie

$$\overline{j_{\mu}} : \overline{j_{\mu}} : \overline{j_{\mu}} = (c_S^1 j_F)^{1/2} : (c_S^2 j_F)^{1/2} : (c_S^3 j_F)^{1/2} = 1 : 1.93 : 1.93 \quad (5-70)$$

verhalten, also eine ausgeprägte Anisotropie besteht, die in den bisherigen Arbeiten nicht berücksichtigt wurde.

5.2.2.5 Korrekturfaktoren

Für die Einschränkung der Auswirkungen der Voraussetzung e), g) des Kap.5.2.2.1 werden Korrekturen eingeführt; für die Voraussetzungen b), d) werden Korrekturfaktoren im Prinzip vorgeschlagen.

5.2.2.5.1 Berücksichtigung der zeitlichen Mittelung über Δt (Voraussetzung g)

In Kap. 3.1 wurden die Mittelungsoperationen definiert als Mittelung über Maschenflächen-bzw. Maschenvolumina und über ein Zeitintervall Δt . Dies ist notwendig, da für die zeitliche Integration gesetzt wird

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \delta_t u,$$

wozu man formal durch eine Mittelung über Δt gelangt. In diesem Kapitel 5 wurde bisher nicht berücksichtigt, daß die Reynolds-Spannungen $\overline{u_i' u_j'}$ außer der Mittelung über die j-Fläche auch die Mittelung über Δt enthalten. Dies soll nun durch folgenden Korrekturfaktor ${}^j c_g$ berücksichtigt werden:

$${}^j c_g \equiv \left[\frac{\langle \overline{u_i' u_j'} \rangle}{\langle \overline{u_i' u_j'} \rangle} \right]^{1/2} \quad (5-71)$$

Hiermit lautet der vollständige Ansatz:

$$\overline{u_i' u_j'} = - {}^j c_g c_2 ({}^j F \overline{u_i' u_j'})^{1/2} (\delta_{x_i} \overline{u_j'} + \delta_{x_j} \overline{u_i'}) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_e' u_e'} \quad (5-72)$$

Zur Bestimmung von ${}^j c_g$ wird entsprechend der Taylor'schen Hypothese [132,115] angenommen, daß die Zeitachse gemäß $x_1 = t \cdot \langle u_1 \rangle$ in eine räumliche Koordinate transformiert werden kann. Damit ist $\langle \overline{u_i' u_j'} \rangle$ für ein dreidimensionales Volumen mit den Kantenlängen $\Delta t \cdot \langle u_1 \rangle, \Delta x_m, \Delta x_n$ ($m+n+j$) zu bestimmen. Aus den Ergebnissen des Kap.4 folgt hierfür

$${}^j c_g = \left[\frac{E3(\Delta t \langle u_1 \rangle, \Delta x_m, \Delta x_n)}{E2(\Delta x_m, \Delta x_n)} \right]^{1/2} \quad (5-73)$$

Für das von Deardorff [29] berechnete Problem mit

$$\Delta x_1 = 0.125, \Delta x_2 = 0.05, \Delta x_3 = 0.05, \Delta t = 0.003, \langle u_1 \rangle = 28$$

ergibt sich:

$${}^1 c_g = 1.18, \quad {}^2 c_g = 1.09, \quad {}^3 c_g = 1.09 \quad (5-74)$$

Der Effekt der zeitlichen Mittelung ist also von nicht vernachlässigbarer Größe und um so wesentlicher, je größer das Verhältnis $\Delta t / ({}^j F)^{1/2}$ ist.

Der Korrekturfaktor bewirkt eine kleine Verringerung der Anisotropie von μ gemäß (5-70).

5.2.2.5.2 Zur Berücksichtigung der Abweichungen des tatsächlichen Energie-Spektrums vom Kolmogorov-Spektrum (Voraussetzung b)

Gemäß (A3-20) und (A3-37) bewirken Abweichungen des tatsächlichen Spektrums bei Wellenzahlen $k < \pi/h$ Fehler in den berechneten mittleren Quadraten der Deformationsgeschwindigkeiten und bei $k > \pi/h$ Fehler in den berechneten mittleren kinetischen Energien. Im ersten Falle wären also Korrekturfaktoren der Form

$$c_d = \frac{\int_0^{\pi/h} k^2 E(k) dk}{\int_0^{\pi/h} k^2 E_R(k) dk} \quad (5-75)$$

und im zweiten Fall

$$c_e = \frac{\int_{\pi/h}^{\infty} E(k) dk}{\int_{\pi/h}^{\infty} E_R(k) dk} \quad (5-76)$$

anzubringen, wobei $E_R(k)$ das Kolmogorov-Spektrum gemäß (4-4) sei. Denkbare verallgemeinerte Formen von $E(k)$, die für $k \ll \pi/h$ in die Asymptote k^4 gemäß (A1-37) und für $k \gg \pi/h$ in das Pao-Spektrum E_p (A1-34) übergehen, sind z.B.:

$$E(k) = \left(1 - e^{-(Lk)^{4.5/3}} \right) E_p(k) \quad (5-77)$$

oder

$$E(k) = \frac{(Lk)^{4.5/3}}{1 + (Lk)^{4.5/3}} E_p(k). \quad (5-78)$$

L ist eine experimentell zu bestimmende Länge. Da hierfür keine Angaben bekannt sind, werden die Korrekturen für $k < \pi/h$ nicht weiter untersucht*).

Im folgenden wird abgeschätzt, ab welcher Reynolds-Zahlen die Berücksichtigung des Pao-Spektrums notwendig wäre. Es folgt aus (5-76, A1-34):

$$c_e = \exp \left[-\frac{3}{2} \alpha \nu \langle \epsilon \rangle^{1/3} \left(\frac{\pi}{h} \right)^{4/3} \right] \quad (5-79)$$

Setzt man gemäß (1-36) $\langle \epsilon \rangle = 2 \langle u \rangle^3$ sowie gemäß [18] $\langle u \rangle \approx 26, h = 0.05$ (entsprechend dem minimalen Δx_1 bei Deardorff [29]), so folgt

$$c_e \approx \exp \left[-\nu / 6.66 \cdot 10^{-3} \right] \approx 1 - \frac{\nu}{6.66 \cdot 10^{-3}} \quad \text{für } \nu \ll 10^{-3}. \quad (5-80)$$

*) Abb.22 zeigt, daß das Kolmogorov-Spektrum schon für die Grobstruktur zutrifft. Die Vernachlässigung dieser Korrekturfaktoren erscheint daher gerechtfertigt.

Damit also dieser Korrekturfaktor c_e einen Einfluß von weniger als 1% auf die Berechnung der kinetischen Energien hat, muß gelten: (5-81)

$$v < 7 \cdot 10^{-5}$$

Und wegen (1-14) muß also die Reynoldszahl Re_m größer sein als $3 \cdot 10^5$. Mit anderen Worten: das verwendete Turbulenzmodell, das die Existenz des Kolmogorov-Spektrums voraussetzt, ist gültig für $Re_m \gtrsim 10^5$. Für Reynoldszahlen kleiner 10^5 ist das Pao-Spektrum zu berücksichtigen. Diese Aussage stimmt mit dem Ergebnis des Kap.4.1.2 überein.

5.2.2.5.3 Berücksichtigung der Randomität (Voraussetzung d)

Wie auch von Fox-Lilly [43] erwähnt, ist das bisher dargestellte Modell gemäß Voraussetzung d) (Kap.5.2.2.1) ein deterministisches Modell. Das verwendete Feinstrukturmodell kann nur im statistischen Mittel mit der Realität übereinstimmen, da echte Turbulenz random ist. Effekte wie die Zeitspanne über die eine Vorhersage der turbulenten Bewegung bei nur an diskreten Punkten gegebenen Anfangswerten innerhalb eines vorgebbaren statistischen Fehlers möglich ist [85], können daher nicht untersucht werden. Um künstlich eine Randomität in das Modell einzuführen, könnte man daran denken, einen per Zufallszahlengenerator mit Mittelwert Eins bestimmten Faktor in (5-29) zusätzlich einzuführen. Das Problem besteht hier in der Bestimmung der Schwankungsbreite und eventueller Korrelationen zu den Zähigkeiten μ in benachbarten Maschen. Das Problem ist bis heute noch nicht untersucht worden und konnte auch im Rahmen dieser Arbeit nicht gelöst werden. Durch die zusätzliche Integration der Energiegleichung enthält das hier verwendete Modell jedoch gegenüber den früheren Arbeiten einen weiteren Freiheitsgrad, weswegen man annehmen kann, daß der "Grad der Deterministik" etwas vermindert ist. In diesem Zusammenhang ist wohl auch die Frage zu sehen, welchen Effekt die Mittelung der kinetischen Energien $\overline{v^2 E}$ über vier Maschen bewirkt, um den relevanten Wert an dem Eckpunkt zwischen den vier Maschen zu erhalten, der letztlich zur Berechnung der Zähigkeit μ an diesem Ort benötigt wird. Auch hierauf gibt es keine Antwort.

5.2.2.5.4 Berücksichtigung der numerisch ermittelten Konstanten

(Voraussetzung e)

Gemäß Voraussetzung e) (Kap.5.2.2.1) wurden die Konstanten σ_1, σ_2 bisher zu 1 angenommen. Man kann nun diese Voraussetzung nachträglich einschränken, indem

man die Werte der durch (5-14, 15) definierten Konstanten aus der numerischen Lösung ermittelt. Nach Approximation von $\overline{j\dot{\epsilon}^2}$ durch $\overline{\dot{\epsilon}^2}$ und der in den Definitionen auftretenden Deformationsgeschwindigkeitsquadrate durch (5-57) wurden σ_1 und σ_2 berechnet. Außerdem wurde entsprechend der im Deardorff'schen Modell einzuführenden Korrekturfaktor (vergl. A3.5)

$$\sigma_3 = \left\langle \left(\frac{1}{2} \overline{\dot{D}_{ij}^2} \right)^{3/2} \right\rangle / \left\langle \frac{1}{2} \overline{\dot{D}_{ij}^2} \right\rangle^{3/2} \quad (5-82)$$

bestimmt. Über die Ergebnisse wird in Kap. 10.4.6 berichtet.

5.2.3 Modell für den inhomogenen Anteil der Feinstruktur und Zusammenfassung

5.2.3.1 Modell für den inhomogenen Anteil^{*)}

In diesem Abschnitt ist der Ansatz für $\overline{\rho \langle u_i' u_j' \rangle}$ zu erläutern. Für die betrachtete Kanalströmung gilt

$$\overline{\rho \langle u_i' u_j' \rangle} = 0 \quad \text{für} \quad i, j \neq 1, 3 \quad \text{bzw.} \quad 3, 1 \quad (5-83)$$

Zudem ist

$$\sigma_{x_1} \overline{\rho \langle u_1' u_3' \rangle} = 0 \quad (5-84)$$

Folglich wird lediglich für $\overline{\rho \langle u_1' u_3' \rangle}$ ein Modell benötigt. Hierfür wird ein Boussinesq -Ansatz entsprechend Kap. 5.2.2.3.1. verwendet:

$$\overline{\rho \langle u_1' u_3' \rangle} = - \rho_\mu \sigma_{x_3} \overline{\rho \langle u_1' \rangle} \quad (5-85)$$

Die turbulente Zähigkeit ρ_μ wird entsprechend dem Prandtl'schen Mischungswegmodell aus

$$\rho_\mu = \rho_L^2 \left| \sigma_{x_3} \overline{\rho \langle u_1' \rangle} \right| \quad (5-86)$$

berechnet, mit

$$\rho_L^2 = \min (c_{10} \cdot F, L^2) \quad (5-87)$$

und L in Verallgemeinerung der Formel von van Driest (2-8):

$$L = R \cdot z' \left[1 - \exp \left\{ -z' Re' z'^{1/2} / A_w \right\} \right] \quad (5-88)$$

Die Verallgemeinerung besteht hier in der Verwendung von

$$Re' = \max \left(\frac{1}{\nu} - Re_{krit}, 0 \right) \quad (5-89)$$

wobei Re_{krit} die kritische Reynolds-Zahl Re ist, unterhalb derer die Strömung laminar ist:

$$\begin{aligned} Re_{krit} &= Re_{m,krit} / \overline{\rho \langle u_1' \rangle} \\ Re_{m,krit} &\approx 2100 \end{aligned} \quad (5-90)$$

^{*)} gemäß Definition in Kap. 5.2.1

Damit erfüllt $\langle \overline{u_1' u_3'} \rangle$ die Forderungen b, c, d, e gemäß Kap.5.2.1, denn

$$b) \quad \langle \overline{u_1' u_3'} \rangle + \langle (\overline{u_1' u_3'})'' \rangle = \langle \langle \overline{u_1' u_3'} \rangle \rangle \neq 0$$

$$c) \quad \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow \infty \\ \Delta x_2 \rightarrow 0}} \langle \overline{u_1' u_3'} \rangle = -L^2 \left| \frac{\partial_x \langle u_1 \rangle}{\partial_x \langle u_3 \rangle} \right|$$

wegen L gemäß (5-88)

$$d) \quad \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_3 \rightarrow 0}} \langle \overline{u_1' u_3'} \rangle + \langle (\overline{u_1' u_3'})'' \rangle = 0$$

wegen (5-88)

$$e) \quad \langle \overline{u_1' u_3'} \rangle + \langle (\overline{u_1' u_3'})'' \rangle = 0 \quad \text{für} \quad \frac{1}{\nu} < Re_{krit} \quad \text{wegen (5-88,89)}$$

Die einzige zu bestimmende Konstante ist c_{10} . Diese Konstante ist gemäß (5-87) offenbar dadurch bestimmt, daß für $c_{10} \cdot \overline{3_F} = L^2$ gilt

$$\langle \overline{u_1' u_3'} \rangle = \langle \overline{u_1' u_3'} \rangle \quad \text{bzw.} \quad (\overline{u_1' u_3'})'' = 0$$

D.h. falls die Maschenfläche $\overline{3_F}$ gleich L^2/c_{10} ist, findet der gesamte konvektive Impulstransport innerhalb der Feinstruktur statt. Die Maschenfläche F muß dann so groß sein, daß zwischen den Geschwindigkeiten an extrem gelegenen Punkten der Fläche keine Korrelation besteht. Aus den Messungen von Comte-Bellot [18] muß demnach die Fläche $\overline{3_F}$ in Kanalmittte in Strömungsrichtung ca. die Länge 1,6 und in azimuthaler Richtung die Länge 0,8 (dimensionslos) aufweisen. Setzt man dabei für L gemäß (2-7) etwa den Wert 0.1 an, so folgt

$$c_{10} = \frac{L^2}{\overline{3_F}} \approx 0.01 \quad (5-91)$$

Selbstverständlich ist diese Abschätzung sehr ungenau. Eine genauere Bestimmungsmethode ist jedoch nicht vorhanden und so wird daher mit diesem Wert gerechnet. Die Konstante kann als Eingabegröße zu dem verwendeten Programm leicht variiert werden, hat sich jedoch mit obigem Wert bewährt (siehe Kap.10).

Zu der gemäß (5-44) berechneten kinetischen Energie ist, um die gesamte in der Feinstruktur enthaltene kinetische Energie zu erhalten, für Auswertungszwecke ein Anteil zu addieren, der diesem inhomogenen Schubspannungsanteil entspricht.

Hierfür wird gemäß (2-9) gesetzt.

$$\overline{P_{\langle \underline{E} \rangle}} = \frac{1}{a_1^2} \overline{P_{L^2}} (\delta_{x_3} \overline{P_{\langle u_1 \rangle}})^2 \quad (5-92)$$

Mit $a_1=1$ gemäß [91, 13] (siehe Tab.1). Auch diese Approximation erscheint wohl etwas gewagt, ihr Fehler ist jedoch für die numerische Integration völlig bedeutungslos und bei der Auswertung wegen

$$L^2 < 0.01 \text{ }^3F \lesssim 10^{-4}$$

ebenfalls tolerierbar.

5.2.3.2 Zusammenfassung der lokalisotropen und inhomogenen Anteile

Faßt man nun den lokalisotropen mit dem inhomogenen Teil zusammen, so haben wir folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned} \overline{j_{u_i' u_j'}} &= -j_{\mu} (\delta_{x_j} (\overline{u_i} - \overline{P_{\langle u_i \rangle}}) + \delta_{x_i} (\overline{u_j} - \overline{P_{\langle u_j \rangle}})) \\ &\quad - \overline{P_{\mu}} \delta_{x_3} \overline{P_{\langle u_1 \rangle}} \delta_{ij} + \overline{P_{\langle u_1' u_3' \rangle}} \delta_{ij} \delta_{j1} \\ &\quad + \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_e' u_e'} \end{aligned} \quad (5-93)$$

mit j_{μ} gemäß (5-31) und $\overline{P_{\mu}}$ gemäß (5-86); die Werte von $\overline{P_{\langle u_1' u_3' \rangle}}$ und $\overline{u_e' u_e'}$ sind für die Integration ohne Bedeutung. Wegen $\overline{P_{\langle u_2 \rangle}} \approx \overline{P_{\langle u_3 \rangle}} = 0$ kann auch geschrieben werden

$$\overline{j_{u_i' u_j'}} = -j_{\mu} (\delta_{x_i} \overline{u_j} + \delta_{x_j} \overline{u_i}) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_e' u_e'} \quad ; \quad i,j \neq 1,3; \quad i,j \neq 3,1. \quad (5-94)$$

$$\overline{j_{u_1' u_3'}} = -\overline{P_{\mu}} (\delta_{x_1} \overline{u_3} + \delta_{x_3} \overline{u_1}) + (\overline{P_{\mu}} - \overline{j_{\mu}}) \delta_{x_3} \overline{P_{\langle u_1 \rangle}} \quad (i,j=1,3) \quad (5-95)$$

5.2.4 Invarianz-Eigenschaften des Ansatzes

Damit Turbulenzmodelle nicht zu Widersprüchen mit den Grundgleichungen führen, müssen folgende Invarianz-Forderungen erfüllt sein [34].

- 1) die modellierten Terme müssen die gleichen tensoriellen und Symmetrie-Eigenschaften wie die Original-Terme besitzen;
- 2) sie müssen dimensionsmäßig korrekt sein;
- 3) sie müssen invariant sein bezüglich Galilei-Transformation (Verschiebung des Koordinatensystems).

Gleichung (5-93) erfüllt die Forderung 1), denn auf beiden Seiten steht ein Tensor 2.Ordnung, der symmetrisch ist bezüglich der unteren Indices. Die zweite Forderung wird offensichtlich ebenfalls erfüllt. Da auf der rechten Seite nur Geschwindigkeitsdifferenzen auftreten, gilt auch die dritte Forderung. Diese Invarianzeigenschaften erlauben die Übertragung auf zylindrische Koordinaten, wenn die entsprechenden Komponenten der Deformationsgeschwindigkeiten auf der rechten Seite eingesetzt werden.

Auf den ersten Blick erscheint es vielleicht fraglich, ob die Ungleichheit

$$\overline{u_i' u_j'} \neq \overline{u_i' u_j'}$$

zulässig ist. Das dies jedoch tatsächlich so sein muß, zeigt folgende Überlegung:

Wir bilden von $u_i \cdot u_j$ den zeitlichen Mittelwert $\langle u_i u_j \rangle$ und mitteln sodann über eine i- bzw. eine j-Fläche:

$$\begin{aligned} \overline{\langle u_i u_j \rangle} &= \langle \overline{u_i u_j} \rangle = \langle \overline{u_i} \cdot \overline{u_j} \rangle + \langle \overline{u_i' u_j'} \rangle \\ \overline{j \langle u_i u_j \rangle} &= \langle j \overline{u_i u_j} \rangle = \langle j \overline{u_i} \cdot j \overline{u_j} \rangle + \langle j \overline{u_i' u_j'} \rangle \end{aligned}$$

In homogener Turbulenz gilt:

$$\overline{\langle u_i u_j \rangle} = \overline{j \langle u_i u_j \rangle}$$

Wenn jetzt der Durchmesser der i-Fläche gegen Null, der Durchmesser der j-Fläche aber gegen Unendlich strebt, so gilt

$$\langle \overline{u_i} \cdot \overline{u_j} \rangle = \langle \overline{u_i u_j} \rangle = \langle u_i u_j \rangle$$

und

$$\langle j \overline{u_i} \cdot j \overline{u_j} \rangle = 0$$

folglich ist $\langle \overline{u_i' u_j'} \rangle = 0 \neq \langle j \overline{u_i' u_j'} \rangle = \langle u_i' u_j' \rangle$

Andererseits gilt für den Grenzübergang zu infinitesimalen Maschen in Übereinstimmung mit dem Boltzmann-Axiom [119]

$$\langle \overline{u_i' u_j'} \rangle = \langle j \overline{u_i' u_j'} \rangle \quad (\Delta x_k \rightarrow 0, k=1,2,3),$$

weil dann beide Terme gegen Null streben.

Das hier verwendete Modell erfüllt also alle geforderten Invarianzeigenschaften.

5.2.5 Übertragung auf zylindrische Koordinaten und nicht äquidistante Maschen

5.2.5.1 Reynolds-Spannungen

Für die über Flächen gemittelten Reynolds-Spannungen sind in zylindrischen Koordinaten die gleichen Formeln wie für kartesische anwendbar, wenn der Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten $\bar{D}_{ij} \equiv \delta_{xi} \bar{u}_j + \delta_{xj} \bar{u}_i$ durch die entsprechenden für Zylinderkoordinaten gültigen Formeln ersetzt wird [53]:

$$\bar{D}_{ij} = \begin{pmatrix} 2 \delta_x \bar{u}_x & \frac{1}{r} \delta_\varphi \bar{u}_x + \delta_x \bar{u}_\varphi & \delta_r \bar{u}_x + \delta_x \bar{u}_r \\ \delta_x \bar{u}_\varphi + \frac{1}{r} \delta_\varphi \bar{u}_x & 2 \left(\frac{1}{r} \delta_\varphi \bar{u}_\varphi + \frac{\bar{u}_r}{r} \right) & r \delta_r \left(\frac{\bar{u}_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \delta_\varphi \bar{u}_r \\ \delta_x \bar{u}_r + \delta_r \bar{u}_x & \frac{1}{r} \delta_\varphi \bar{u}_r + r \delta_r \left(\frac{\bar{u}_\varphi}{r} \right) & 2 \delta_r \bar{u}_r \end{pmatrix} \quad (5-96)$$

Für die beiden Terme $\overline{u_r' u_\varphi'}$, $\overline{u_\varphi'^2}$ wird gesetzt:

$$\overline{u_r' u_\varphi'} = -\frac{\nu}{\mu} \left[r \delta_r \left(\frac{\bar{u}_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \delta_\varphi \bar{u}_r \right], \quad (5-97)$$

$$\overline{u_\varphi'^2} = -\frac{\nu}{\mu} 2 \left(\frac{1}{r} \delta_\varphi \bar{u}_\varphi + \frac{\bar{u}_r}{r} \right), \quad (5-98)$$

$$\text{mit } \frac{\nu}{\mu} = c_2 \bar{E}' \cdot h. \quad (5-99)$$

Die für den inhomogenen Anteil maßgebende Deformationsgeschwindigkeit ist $\delta_r \langle \bar{u}_x \rangle$.

Die Konstante c_2 wird wie für eine kartesische Masche mit den Kantenlängen $\Delta x, \Delta \varphi, \Delta r$ berechnet.

5.2.5.2 Energie-Berechnung

Für die Berechnung der kinetischen Energie \bar{E}' wird folgende Gleichung benutzt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}'}{\partial t} = & -\delta_x (\bar{u}_x \bar{c}_s \bar{E}') - \frac{1}{r} \delta_\varphi (\bar{u}_\varphi \bar{c}_s \bar{E}') - \frac{1}{r} \delta_r (r \bar{u}_r \bar{c}_s \bar{E}') \\ & + P + \delta_x \left[(v + \bar{c}_s (\bar{F} \bar{E}')^{1/2}) \delta_x \bar{E}' \right] \\ & + \frac{1}{r} \delta_\varphi \left[(v + \bar{c}_s (\bar{F} \bar{E}')^{1/2}) \frac{1}{r} \delta_\varphi \bar{E}' \right] \\ & + \frac{1}{r} \delta_r \left[(v + \bar{c}_s (\bar{F} \bar{E}')^{1/2}) r \delta_r \bar{E}' \right] - S \end{aligned} \quad (5-100)$$

P, S werden wie in kartesischen Koordinaten unter Verwendung der (5-96) *)
entsprechenden Formeln für D^2 berechnet. Die Konstanten und Flächen, die
mit den Indices x, φ, τ gekennzeichnet sind, werden wie für eine entsprechende
kartesische Masche mit den Kanten $\Delta x, \tau \Delta \varphi, \Delta \tau$ und Indices 1,2,3 anstelle
 x, φ, τ berechnet.

5.2.5.3 Übertragung auf nichtäquidistante Maschen

Bei nichtäquidistanten Maschen werden leicht veränderte Differenzenformeln
verwendet, wie dies im folgenden Kapitel beschrieben wird. Die Berechnung
der Konstanten erfolgt nach den für kartesische, äquidistante Maschen ab-
geleiteten Methoden, wobei als charakteristische Maschenkanten die bezüg-
lich des Mittelpunktes der betrachteten Masche gültigen mittleren Kantenlängen
verwendet werden. Dies dürfte zulässig sein, wenn die Maschenkanten nur
schwach variieren.

*) Siehe Anhang 7

6. Differenzenverfahren

Nachdem in dem vorhergehenden Kapitel die nichtlinearen Terme, die bei der Integration der Grundgleichungen über Maschenvolumina gemäß Kap.3 unbestimmt blieben, durch ein Feinstrukturmodell approximiert wurden, sind nun noch die unbestimmten linearen Größen zu approximieren. Das Ergebnis ist sodann ein abgeschlossenes System von Differenzenformeln, das bei geeigneten Rand- und Anfangsbedingungen numerisch integriert werden kann.

6.1 Lineare Differenzenapproximationen

Es sind zwei Arten von linearen Größen zu approximieren:

- a) Flächen- und Volumenmittelwerte von Geschwindigkeiten und Drücken, die nicht mit den im Maschennetz gespeicherten Größen übereinstimmen;
- b) partielle Ableitungen von Geschwindigkeiten (nur erste Ableitungen!) und hierbei wieder zwei Typen:

- b 1) $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ (Ableitung senkrecht zur Mittelungsfläche)
- b 2) $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ (Ableitung parallel zur Mittelungsfläche)

Die Größen gemäß a) werden durch arithmetische Mittelung aus benachbarten, im Maschennetz bekannten, entsprechenden Größen approximiert. Hierbei werden nichtäquidistante Maschen, sowie die Variation der Maschengrößen mit dem Radius bei zylindrischen Koordinaten durch geeignete Gewichte berücksichtigt. Die hierbei verwendete Notation ist definiert durch

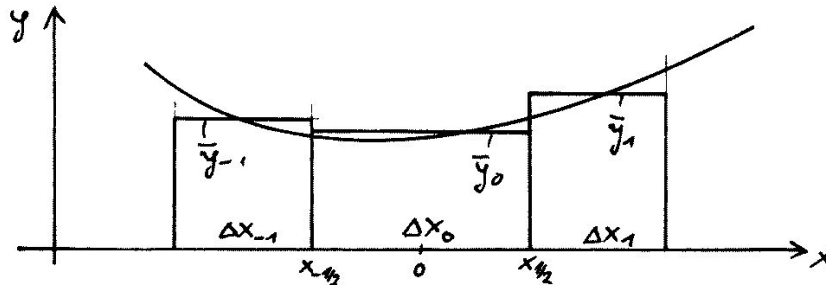
$$\tilde{y}^x = \left[\Delta x_+ \cdot y(x + \frac{1}{2} \Delta x_+) + \Delta x_- \cdot y(x - \frac{1}{2} \Delta x_-) \right] \quad (6-1)$$

Die Größen b1) können problemlos mit einem Abbruchfehler der Größenordnung Δx^2 approximiert werden durch

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \approx \delta_{x_1} u_1,$$

da die Ableitung gemäß (3-13) auf halber Strecke zwischen zwei Maschenflächen zu approximieren ist.

Bezüglich b2) ist gemäß folgender Skizze die Ableitung einer Funktion $y(x)$ an einem Ort $x_{1/2}$ zu bestimmen, wobei von y lediglich die Mittelwerte in den benachbarten Intervallen bekannt sind:



Nimmt man nun im Sinne einer Taylor-Reihen-Entwicklung und entsprechend der stationären laminaren Lösung an, daß $y(x)$ in erster Näherung durch eine Parabel der Form

$$y = a x^2 + b x + c$$

(Koordinatenursprung x im Mittelpunkt der mittleren Masche) beschreibbar ist, so lassen sich die Koeffizienten a , b , c bei gegebenen \bar{y}_{-1} , \bar{y}_0 , \bar{y}_1 und sodann die Ableitung $\partial y / \partial x (x_{1/2})$ berechnen. Die asymmetrische Berücksichtigung von y_{-1} und nicht von y_2 wird gewählt, weil die Ableitung stets paarweise für $x_{1/2}$ und $x_{-1/2}$ berechnet werden müssen. Wir erhalten so folgende Differenzenapproximation:

$$\frac{\partial y}{\partial x} (x_{1/2}) = \bar{\partial}_x y(x_{1/2}) \equiv \alpha_1 \bar{y}_1 + \alpha_2 \bar{y}_0 + \alpha_3 \bar{y}_{-1} \quad (6-2)$$

mit

$$\alpha_1 = (6 \Delta x_{-1} \cdot \Delta x_0 + 2 \Delta x_{-1}^2 + 4 \Delta x_0^2) / d$$

$$\alpha_2 = (-6 \Delta x_{-1} \Delta x_0 - \Delta x_0^2 + 2 \Delta x_1^2 - 2 \Delta x_{-1}^2) / d$$

$$\alpha_3 = (2 \Delta x_0^2 - 2 \Delta x_1^2) / d$$

$$d = (\Delta x_{-1} + \Delta x_0) (\Delta x_0 + \Delta x_{+1}) (\Delta x_{-1} + \Delta x_0 + \Delta x_{+1})$$

Für äquidistante Maschen $\Delta x_{-1} = \Delta x_0 = \Delta x_1 = \Delta x$ folgt $\alpha_1 = \frac{1}{\Delta x}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{\Delta x}$, $\alpha_3 = 0$,

d.h. diese Überlegungen sind nur für nichtäquidistante Maschen von Bedeutung; hier jedoch sind sie wesentlich. Ähnliche Überlegungen sind dem Autor aus der Literatur nicht bekannt.

6.2 Differenzenformeln

In Anbetracht der verwendeten "eindimensionalen" Geometrien sind nicht-äquidistante Maschen allein in radialer Richtung sinnvoll. Dies wird in den folgenden Formeln berücksichtigt. Die Differenzenformeln werden allein für zylindrische Koordinaten angegeben. Die entsprechenden Formeln für kartesische Koordinaten ergeben sich, indem für Radien r in Termen, bei denen diese paarweise im Zähler und Nenner auftreten, der Wert 1 eingesetzt wird und Terme, bei denen der Radius r häufiger im Nenner als Zähler auftritt, gleich Null gesetzt werden (entspricht dem Grenzübergang $r \rightarrow \infty$).

Alle auftretenden Geschwindigkeiten sind Flächenmittelwerte; der Mittelungsstrich wird daher im folgenden fortgelassen. Das Symbol p bezeichnet die scheinbaren turbulenten Druckschwankungen:

$$p = \bar{p} + \frac{1}{3} \overline{u'_e u'_e}, \quad i=1,2,3 \quad (6-3)$$

6.2.1 Differenzenformeln für den Impuls

Die Differenzenformeln für den Impuls lauten:

$$\begin{aligned} & \left[\overline{\delta_t v_x^t} + \delta_x (\overline{v_x^x} \overline{v_x^x}) + \frac{1}{r} \delta_\varphi (\overline{v_\varphi^x} \overline{v_x^x}) + \frac{1}{r} \delta_r (\overline{r v_x^r} \overline{v_x^x}) \right]^{n1} = \left[-\delta_x p \right]^{n2} + p_x \\ & + \left[\delta_x \left\{ \overline{v_x^x} (2 \delta_x v_x) \right\} + \frac{1}{r} \delta_\varphi \left\{ \overline{v_\varphi^x} \left(\frac{1}{r} \delta_\varphi v_x + \delta_x v_\varphi \right) \right\} + \frac{1}{r} \delta_r \left\{ \overline{r v_x^r} (\delta_r v_x + \delta_x v_r) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{r} \delta_r \left\{ + (\overline{p_\mu^r} - \overline{r_\mu}) \overline{\delta_r v_x} \right\} \right]^{n0} \\ & \left[\overline{\delta_t v_\varphi^t} + \delta_x (\overline{v_x^\varphi} \overline{v_\varphi^x}) + \frac{1}{r} \delta_\varphi (\overline{v_\varphi^\varphi} \overline{v_\varphi^\varphi}) + \frac{1}{r} \delta_r (\overline{r v_\varphi^r} \overline{v_\varphi^\varphi}) + \frac{v_\varphi}{r^2} \overline{v_r^r} \right]^{n1} \\ & = \left[-\frac{1}{r} \delta_\varphi p \right]^{n2} + \left[\delta_x \left\{ \overline{v_x^\varphi} (\delta_x v_\varphi + \frac{1}{r} \delta_\varphi v_x) \right\} + \frac{1}{r} \delta_\varphi \left\{ 2 \overline{v_\varphi^\varphi} \left(\frac{1}{r} \delta_\varphi v_\varphi + \frac{v_r}{r} \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{r} \delta_r \left\{ \overline{r v_\varphi^r} \left(\overline{\delta_r v_\varphi} + \frac{1}{r} \delta_\varphi v_r \right) \right\} + \overline{v_\varphi^\varphi} \left(\delta_r \frac{v_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \delta_\varphi \frac{v_r}{r} \right) \right]^{n0} \quad (6-4) \\ & \left[\overline{\delta_t v_r^t} + \delta_x \left(\frac{\overline{r v_x^r}}{r} \overline{v_r^x} \right) + \frac{1}{r} \delta_\varphi (\overline{v_\varphi^r} \overline{v_r^\varphi}) + \frac{1}{r} \delta_r \left(\frac{\overline{r v_r^r}}{r} \overline{v_r^r} \right) - \frac{\overline{v_\varphi^2}}{r} \right]^{n1} \\ & = \left[\delta_r p \right]^{n2} + \left[\delta_x \left\{ \overline{v_x^r} (\delta_x v_r + \overline{\delta_r v_x}) \right\} + \frac{1}{r} \delta_\varphi \left\{ \overline{v_\varphi^r} \left(\overline{\delta_r v_\varphi} + \frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \delta_\varphi v_r \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{r} \delta_r \left(2 \overline{r v_r^r} + \overline{\delta_r v_r} \right) - 2 \overline{v_\varphi^\varphi} \left(\frac{1}{r^2} \delta_\varphi v_\varphi + \frac{v_r}{r^2} \right) \right]^{n0} \\ & \overline{v_\mu^x} \equiv \overline{v_\mu^x} + v; \quad \overline{v_\mu^\varphi} \equiv \overline{v_\mu^\varphi} + v; \quad \overline{v_\mu^r} \equiv \overline{v_\mu^r} + v; \quad \overline{p_\mu^r} \equiv \overline{p_\mu^r} + v; \quad \overline{v_\mu^i} \equiv \overline{v_\mu^i} + v. \end{aligned}$$

Die hochgestellten Indices n_0 , n_1 , n_2 bezeichnen die Zeitschritte. Für den ersten Zeitschritt $n=1$ ist $n_0=1$, $n_1=2$, $n_2=2$, für die folgenden N Zeitschritte $n=2,3,\dots,N$ ist $n_0=n-1$, $n_1=n$, $n_2=n+1$. Nach N Zeitschritten werden die Lösungen zum Zeitpunkt $N+1$ mit einer Lösung gemittelt, die sich aus $n_0=n_1=N$, $n_2=N+1$ ergibt. Danach wird wie für $n=1$ neu begonnen. Dieses sogenannte leapfrog-, midpoint - oder Bocksprung-Verfahren besitzt mit Ausnahme des ersten und letzten Schritts bezüglich der konvektiven Terme eine Genauigkeit der Ordnung Δt^2 und hat sich vielfach bewährt [29, 33, 42, 79, 141], da es im Gegensatz beispielsweise zu der Eulerschen-Einschritt-Methode [73,79] eine numerische Dämpfung vermeidet. Die fehlende numerische Dämpfung kann jedoch infolge der Nichtlinearitäten zu $2\Delta t$ -Oszillationen führen, die durch die Mittelung nach N Schritten gedämpft werden. Die konvektiven Terme und die für $\mu = \text{const}$ sich ergebenden diffusiven Terme entsprechen bei äquidistanten Maschen den von Williams [141] verwendeten Differenzenformeln. Entsprechende Formeln für $\mu \neq \text{const}$ und nichtäquidistante Maschen wurden sonst bisher nicht angegeben.

Die Verwendung von Differenzenformeln höherer Genauigkeitsordnung in der Zeit ist wegen der schwierigen Druckberechnung und des damit verbundenen vergrößerten Speicherplatzbedarfs nicht möglich. Die Verwendung genauerer Differenzenformeln im Raum, wie z.B. von Fromm vorgeschlagen [41], erscheint bei turbulenter Strömung nicht sinnvoll, da die größten Fehler vermutlich durch das Feinstrukturmodell entstehen; zudem würden damit die Randbedingungen weit komplizierter.

6.2.2 Differenzenformeln für den Druck p bzw. das Hilfspotential ψ

Der in (6-4) benötigte Druck ist prinzipiell gemäß Kap.1.4.2 aus einer Poisson-Gleichung mit inhomogenen Randbedingungen zu berechnen. Da diese inhomogenen Randbedingungen stören, da zudem die Berechnung des Quellterms q gemäß (1-20) aufwendig ist und vorausgesetzt werden muß, daß das Geschwindigkeitsfeld für die Zeitschritte n_0 und n_1 exakt die Kontinuitätsgleichung erfüllt [54], bzw. Fehler in der Einhaltung der Kontinuitätsgleichung sich von Zeitschritt zu Zeitschritt vergrößern können, wird zunächst nicht der Druck p selbst, sondern ein Hilfspotential ψ berechnet, mit dem alle diese Mängel beseitigt werden. Das hier verwendete Verfahren wurde von Chorin [21] vorgeschlagen, von Amsden-Harlow [3] verwendet und stellt gegenüber den von Deardorff, Williams u.a. [29,141, 54] benutzten einen Fortschritt bezüglich Genauigkeit

und Einfachheit dar. Gegenüber den in [3, 37] vorgeschlagenen Methoden erlaubt es zudem auch die direkte Berechnung des Druckes ohne die Lösung einer zusätzlichen Poisson-Gleichung.

Hierzu wird zunächst ein Geschwindigkeitsfeld \tilde{u}^{n2} für den neuen Zeitpunkt $n2$ nach den Formeln (6-4), jedoch ohne Berücksichtigung des Druckes berechnet. Die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand wird für den neuen Zeitschritt entsprechend der exakten Wandbedingung (1-5) gleich Null gesetzt:

$$v_r^{n2} = \tilde{v}_r^{n2} = 0 \quad (6-5)$$

Dieses Geschwindigkeitsfeld \tilde{u}^{n2} ist nun natürlich nicht das richtige, da der Druck nicht berücksichtigt wurde. Von der richtigen Lösung u^{n2} kann es sich jedoch nur entsprechend den weggelassenen Drucktermen um den Gradienten eines Potentials unterscheiden; es wird also angesetzt:

$$u^{n2} = \tilde{u}^{n2} - \text{grad } \psi \quad (6-6)$$

Hierbei ist ψ ein Hilfspotential und grad die Differenzenform des Gradientenoperators:

$$\text{grad} = \left\{ \delta_x, \frac{1}{r} \delta_\varphi, \delta_r \right\} \quad (6-7)$$

Das richtige Geschwindigkeitsfeld u^{n2} muß die Kontinuitätsgleichung (1-8) erfüllen:

$$\text{div } u^{n2} \equiv \delta_x v_x^{n2} + \frac{1}{r} \delta_\varphi v_\varphi^{n2} + \frac{1}{r} \delta_r (r v_r^{n2}) = 0 \quad (6-8)$$

Das Potential ψ ist also die Lösung folgender Poissongleichung

$$\text{div } \text{grad } \psi = \text{div } \tilde{u}^{n2} \quad (6-9)$$

mit, wegen (6-5), den homogenen Neumann'schen Randbedingungen

$$\delta_r \psi = 0 \big|_{\text{Wand}}. \quad (6-10)$$

Dieses Gleichungssystem kann nach der in Anhang 4 dargestellten Methode durch Reihenentwicklung unter Verwendung der Schnellen Fourier-Transformation (FFT) in sehr effektiver Weise direkt gelöst werden, so daß das Geschwindigkeitsfeld bis auf numerische Rundungsfehler nach jedem Zeitschritt die Kontinuitätsgleichung exakt erfüllt. Dies gilt auch, wenn die Anfangsbedingung die Kontinuitätsgleichung nicht erfüllt. Korrekturen, wie die von Hirt-Harlow [56] vorgeschlagenen und in [29, 141] verwendete, sind hier daher überflüssig.

Im folgenden wird gezeigt, daß der Druck p ohne zusätzliche Lösung einer gesonderten Poissongleichung in einfacher Weise berechnet werden kann aus:

$$p = \frac{\psi}{(n_2 - n_0) \Delta t} \quad \text{für alle Maschen im Innern des Strömungsraumes} \quad (6-11)$$

$$p_w = \pm \frac{\Delta r}{2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} \Big|_{\text{Wand}} + \frac{\psi}{(n_2 - n_0) \Delta t} \Big|_{\text{Wand}} \quad \text{an den Wänden} \quad (6-12)$$

(+für $r=R_1$; -für $r=R_2$)

Hierbei ist $\partial \tilde{v}_r / \partial t|_{\text{Wand}}$ die radiale Beschleunigung an der Wand, die sich ergibt, wenn der Druck nicht berücksichtigt wird; $\psi|_{\text{Wand}}$ ist der Wert des Hilfspotentials in der der Wand unmittelbar benachbarten Masche. Zum Beweis betrachten wir die Bestimmungsgleichung des Druckes, die gemäß (1-19) in Differenzenform lautet:

$$\text{div grad } \psi = \text{div } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \quad (6-13)$$

mit der Randbedingung

$$\sigma_r p = \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} \Big|_{\text{Wand}} \quad (6-14)$$

Wegen $\text{div } \underline{u}^{n_0} = 0$ ist

$$\text{div} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right) = \frac{1}{(n_2 - n_0) \Delta t} \text{div} \left(\tilde{u}^{n_2} \right) \quad (6-15)$$

in allen Maschen, die nicht an die Wand grenzen. In den Wandmaschen dagegen enthält $\text{div } \tilde{u}^{n_2}$ nicht den aus $\partial \tilde{v}_r / \partial t$ folgenden Beitrag zur Divergenz, da $\tilde{v}_r^{n_2}$ gemäß (6-5) gleich dem aus der Wandbedingung folgenden Wert gesetzt wurde. Hier gilt daher

$$\text{div} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right) = \frac{1}{(n_2 - n_0) \Delta t} \text{div } \tilde{u}^{n_2} + \text{div} \left\{ 0, 0, \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} \Big|_{\text{Wand}} \right\}, \quad (6-16)$$

wobei bei dem zweiten Divergenzoperator die im Strömungsinne gelegenen Feldwerte alle gleich Null sind. Bildet man nun entsprechend die Divergenz von (6-14) und subtrahiert sie von (6-13,16) so folgt:

$$\text{div grad } (p_1) = \frac{1}{(n_2 - n_0) \Delta t} \text{div } \tilde{u}^{n_2} \quad (6-17)$$

$$\sigma_r p_1 = 0 \Big|_{\text{Wand}} \quad (6-18)$$

Mit $p_1 = p$ innerhalb aller Maschen und $(6-19)$

$$p_1 = p \pm \frac{\Delta r}{2} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} \Big|_{\text{Wand}} \quad \text{an den Wänden.}$$

Aus der Ähnlichkeit der Gleichungen (6-17,18) und (6-9,10) und der Linearität des Operators div grad folgt das zu beweisende Ergebnis (6-11,12). Bezüglich der Berechnung von $\partial \tilde{v}_r / \partial t|_{\text{Wand}}$ vergleiche Kap.7.7.

6.2.3 Differenzenform der Energiegleichung

Bei der numerischen Integration der Energiegleichung (5-44,100) ist sicherzustellen, daß die Energie \bar{E} stets größer (bzw. bei laminarer Strömung gleich) Null ist. Aus diesem Grunde wird zeitlich mit einem Einschrittverfahren integriert und dabei werden die konvektiven Terme mit sogenannten "upwind"-, "down-stream-" oder "donner-cell"-Differenzenformeln [49, 57, 72, 73, 123] berechnet:

$$u \sigma_x^* y \equiv \begin{cases} u(x - \frac{1}{2}\Delta x) \frac{1}{\Delta x} (y(x) - y(x - \Delta x)); & u(x) > 0 \\ u(x + \frac{1}{2}\Delta x) \frac{1}{\Delta x} (y(x + \Delta x) - y(x)); & u(x) \leq 0 \end{cases} \quad (6-20)$$

Diese Formeln erzwingen, daß der neue Wert von y zum nächsten Zeitschritt bei alleiniger Beachtung der Konvektion stets nicht negativ ist, wenn das Ausgangsfeld überall nicht negativ ist [123]. Wie durch lineare Stabilitätsanalyse gezeigt werden kann (vergl. Anhang 6) ist hierbei die Verwendung des Bocksprung-Verfahrens bezüglich der zeitlichen Integration unzulässig, da es stets instabil wäre. Es wird hier daher das Euler-Verfahren verwendet.

Negative Werte des Energiefeldes könnten unter Umständen entstehen, wenn die Energiedissipation gemäß

$$(\bar{E})^{n2} = (\bar{E})^{n1} + \Delta t \cdot \left(\dots - \frac{C_2}{h} (\bar{E})^{3/2} \right) \quad (6-21)$$

berechnet würde, wobei die Punkte für alle anderen Terme außer dem Senken-Term stehen. Da die analytische Lösung von

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\alpha y^{3/2} \quad (6-22)$$

gegeben ist durch

$$y(t) = \frac{y(t_0)}{\left(1 + \frac{\alpha}{2}(t-t_0)[y(t_0)]^{1/2}\right)^2}, \quad (6-23)$$

wird hier wie folgt integriert:

$$(\bar{E})^{n2} = \frac{(\bar{E})^{n1}}{\left(1 + \frac{C_2 \cdot \Delta t}{2h}(n2-n1)[(\bar{E})^{n1}]^{1/2}\right)^2} + \Delta t \cdot \left(\dots \right) \quad (6-24)$$

Sollte sich trotz dieser Vorsichtsmaßnahmen ein negativer Wert von \bar{E} ergeben, so liegt das an Instabilitäten wegen zu großer Zeitschritte der Integration der Energie-Diffusionsterme. In solchen Fällen wird der Zeitschritt Δt verkleinert.

6.3 Genauigkeit und Stabilität der Differenzenformeln

6.3.1 Genauigkeit

Einige Aspekte der Genauigkeit der Differenzenformeln werden in Anhang 5 im einzelnen diskutiert.

Hierzu gehören:

- a) Statistische Fehler der linearen Differenzenapproximationen
- b) Abbruchfehler
- c) Aliasing-Fehler
- d) Konsistenz der Differenzenformeln mit den aus den Differentialgleichungen folgenden integralen physikalischen Erhaltungssätzen
- e) Numerische Fehler

Die wichtigsten Ergebnisse sind:

- a) Die deterministischen linearen Differenzenapproximationen sind nur im statistischen Mittelwert und bei hinreichend glatten gemittelten Feldern richtig. Die momentanen Abweichungen vom statistischen Mittelwert haben eine Standardabweichung, die proportional zu $\langle \epsilon \rangle^{1/3} \Delta x^{1/3}$ ist, also mit kleiner werdender Dissipation $\langle \epsilon \rangle$ und Maschenkantenlänge Δx nur langsam kleiner wird. Ein Ersatz der deterministischen Approximationen durch ein auch quantitativ bestimmbares statistisches Verfahren erscheint möglich, wurde aber bisher nicht ausgeführt. Die Flächenmittelung bewirkt gegenüber der Betrachtung von Punktgeschwindigkeiten eine Reduzierung des Fehlers nur um etwa den Faktor Drei.
- b) Die Abbruchfehler der Differenzenformeln sind bei äquidistanten Maschen von der Ordnung Δx^2 im Ort und für die in erster Linie wichtigen konvektiven Terme von der Ordnung Δt^2 in der Zeit. Phasenfehler können aufgrund des kleinen Energieanteils der kurzwelligen Fourier-Komponenten der Lösung vernachlässigt werden. Der Effekt der "Falschen Diffusion" wird erläutert, erscheint aber ebenfalls nicht als wesentlich.
- c) Der Effekt des Aliasing wird erläutert. Dieser Fehler kann zu Instabilitäten führen, die jedoch durch die im folgenden diskutierten Erhaltungs-Eigenschaften kontrolliert werden.

- d) Von den Differenzenformeln ist zu fordern, daß für sie ebenso wie für die Differentialgleichung gilt, daß bei Abwesenheit von Quell- und Senkentermen die zeitliche Änderungen des Impulses und der kinetischen Energie im Integral über den gesamten Strömungsraum verschwinden. Diese Bedingung wird von den hier verwendeten Differenzenformeln erfüllt.
- e) Die Ursachen der Entstehung numerischer Fehler werden aufgezeigt. Es werden Regeln angegeben, deren Beachtung diese Fehler insbesondere bei der Bildung umfangreicher Summen vermeiden hilft.

6.3.2 Stabilität

Wie im einzelnen in Anhang 6 dargestellt, werden Stabilitätskriterien untersucht. In erster Linie werden für die linearisierten Differenzenformeln in ihrer dreidimensionalen Form für zylindrische Koordinaten unter Verwendung des Neumann-Kriteriums [111] die zulässigen Zeitschritte bestimmt. Hierbei werden drei Typen von Differenzenformeln untersucht. Der erste entspricht denen zur Impuls-, der zweite der zur Energie \bar{E} -Berechnung. Als dritter Typ werden - wie verschiedentlich empfohlen - Differenzenformeln untersucht, die dem ersten Typ entsprechen, bis auf die Approximation der Diffusionsterme, die gemäß DuFort-Frankel berechnet werden. Hierbei gelangt man zu folgenden Ergebnissen (siehe Anhang 6):

- a) In algebraischer expliziter Form kann der zulässige Zeitschritt Δt (außer beim zweiten Typ) nur für die Grenzfälle reiner Konvektion und reiner Diffusion angegeben werden. Im ersten Fall gilt $\Delta t \sim \frac{\Delta x}{|u|}$ im zweiten $\Delta t \sim \frac{\Delta x^2}{\mu}$; beim dritten Typ ist Δt bei reiner Diffusion bezüglich Stabilität beliebig groß.
- b) Für den allgemeinen Fall gemischter Konvektion und Diffusion wird der zulässige Zeitschritt Δt numerisch bestimmt; vergleichbare Ergebnisse existieren in der Literatur bisher nicht.
- c) Der zulässige Zeitschritt Δt kann wesentlich kleiner sein als das Minimum der sich bei den Grenzfällen ergebenden Zeitschritte. Es wird eine Formel angegeben, wonach ein konservativer Zeitschritt leicht algebraisch bestimmt werden kann.

- d) Die Verwendung der Du Fort-Frankel-Form bei kleinen Zähigkeiten führt in mehrdimensionalen Problemen zu kleineren zulässigen Zeitschritten als die hier verwendeten.

Aus dem Ergebnis a) und der gemäß (5-69) variierenden turbulenten Zähigkeit folgt, daß bei hohen Reynolds-Zahlen der zulässige Zeitschritt stets proportional ist zu den Maschenkanten Δx .

Weiterhin wird in Anhang 6 die Methode von Hirt [57] zur Untersuchung des Einflusses von Nichtlinearitäten auf die Stabilität diskutiert und dabei gezeigt, daß diese Methode hier unpraktikabel ist.

Schließlich sei noch begründet, warum - zur Vermeidung der Instabilitäten - nicht ein implizites Verfahren [44, 111] verwendet wird. Die Gründe hierfür sind:

- a) der numerische Aufwand zur Lösung der hierbei entstehenden, großen, nichtlinearen Gleichungssysteme wäre sehr hoch;
- b) der vergrößerte numerische Aufwand ließe sich nicht durch einen größeren Zeitschritt Δt kompensieren, da die Ungenauigkeiten, insbesondere bezüglich der nichtlinearen Konvektionsterme, hierdurch unzulässig groß würden; vergleiche hierzu beispielsweise die Auswirkung des Zeitschrittes auf das Feinstrukturmodell gemäß Kap.5.2.2.5.1.
- c) der zulässige Zeitschritt ist wegen $\Delta t \sim \Delta x$ ausreichend groß.

7. Randbedingungen

In diesem Kapitel werden die Randbedingungen zur Integration der Differenzengleichungen angegeben. In axialer und azimuthaler Richtung werden periodische Randbedingungen angenommen. Die Periodenlängen werden aufgrund experimenteller Ergebnisse gewählt. In radialer Richtung gelten Wandbedingungen. Hierzu werden die Grundgleichungen über die Wandmaschen integriert und dabei die stark variierenden Profile sowie Wandrauigkeiten durch logarithmische Wandgesetze berücksichtigt.

7.1 Periodizitätsbedingung

Die Grundgleichungen sind bezüglich des Ortes elliptischer Natur und erfordern daher Randbedingungen an allen Oberflächen des betrachteten Strömungsraumes. In axialer und bei Plattenkanälen (bzw. Ringspaltkanälen mit Radienverhältnis R_2/R_1 nahe Eins) in azimuthaler Richtung müssen - da der numerisch simulierte Strömungsraum bei vorgegebenen Maschenweiten nicht beliebig groß gewählt werden kann - derartige Randbedingungen künstlich eingeführt werden. Üblicherweise [29, 83, 94] verwendet man hier periodische Randbedingungen:

kartesisch: $y(x_1 + iX_1, x_2 + jX_2, x_3) = y(x_1, x_2, x_3)$

zylindrisch: $y(x + iX, \varphi + j\phi, \tau) = y(x, \varphi, \tau)$ (7-1)

$i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Diese Randbedingungen wären exakt richtig, wenn $\phi = 2\pi$ ist und der Kanal ein Torus ist mit Umfanglänge X . In allen anderen Fällen ist diese Randbedingung ohne physikalische Realität. In erster Näherung kann man die periodische Randbedingung, z.B. in axialer Richtung, wie folgt rechtfertigen. Wenn die Strömungsfelder y in axialer Richtung nur über eine Länge $X/2$ korreliert sind, d.h. $\langle y(x+z, \varphi, \tau) \cdot y(x, \varphi, \tau) \rangle$ ist gleich Null für $z \gg X/2$, so kann man für $z > X/2$ jede beliebige Randbedingung vorschreiben ohne $y(x, \varphi, \tau)$ zu beeinflussen und z.B. also auch Periodizität fordern. Aus den Messungen von Comte-Bellot [18] in Plattenströmung ist ersichtlich, daß die oben definierte Korrelationslänge axial etwa 1.6 und senkrecht zur Strömungsrichtung etwa 0.8

mal dem Plattenabstand entspricht. Als Periodenlängen werden daher gewählt:

$$\begin{aligned} X_1 &= 4, X_2 = 2 \\ X &= 4, \phi = \begin{cases} 2\pi & R_1/R_2 \leq 0.2 \\ 2/R_1 & R_1/R_2 > 0.2 \end{cases} \end{aligned} \quad (7-2)$$

Die von Deardorff [29] benutzten Werte $X_1=3$, $X_2=0.7$ erscheinen aufgrund der oben zitierten Meßergebnisse als zu klein.

7.2 Exakte Wand-Bedingung und Galilei-Transformation

An den Wänden gilt die exakte Wandbedingung (1-5). Da nur die Bezugsfläche der radialen Geschwindigkeitskomponente in die Wandfläche fällt, kann die exakte Wandbedingung nur hier problemlos simuliert werden:

$$^3\bar{u}_3|_{\text{Wand}} = {}^1\bar{v}_r|_{\text{Wand}} = 0 \quad (7-3)$$

Für die beiden anderen Komponenten sind zusätzliche Näherungen zur Approximation von (1-5) notwendig. Siehe hierzu die folgenden Abschnitte. Zur Verbesserung der Stabilitätseigenschaften und zur Reduzierung numerischer Ungenauigkeiten bei Differenzenbildungen wird eine Galilei-Transformation vorgenommen. Hierzu wird angenommen, daß das Koordinatensystem nicht ruht, sondern sich selbst mit einer Geschwindigkeit VG, die etwa der mittleren axialen Geschwindigkeit entspricht, mit der Strömung in axialer Richtung bewegt. Hierdurch ändern sich die Grundgleichungen nicht. Lediglich die Wandbedingung für die axiale Geschwindigkeitskomponente lautet nun [29]

$$u_1|_{\text{Wand}} = v_x|_{\text{Wand}} = -VG \quad (7-4)$$

7.3 Wandbedingung für die axiale Geschwindigkeitskomponente v_x

Es ist von der exakten über Maschenvolumina gemittelten Impulserhaltungsgleichung (3-15) auszugehen. Betrachtet man hier speziell eine Wandmasche, so ist die Approximation der konvektiven Glieder wegen ${}^1\bar{u}_r|_{\text{Wand}}=0$ problemlos. Dies gilt jedoch nicht für die diffusiven Terme; hier ist der Term

$$\frac{1}{\tau} \delta_\tau \left\{ \tau \overline{v \left(\frac{\partial v_x}{\partial \tau} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right)} \right\}$$

gesondert zu betrachten. Für eine Wandmasche an der inneren Wand bei $r=r_1$ gilt:

$$\frac{1}{r} \delta r \left\{ r \overline{v \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right)} \right\} = \frac{1}{r_1 \Delta r_1} \left\{ r_{3/2} \left[\overline{v \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right)} \right]_{3/2} - R_1 \tau_{w_1} \right\}, \quad (7-5)$$

mit der Wandschubspannung

$$\tau_{w_1} = \overline{v \frac{\partial v_x}{\partial r}}. \quad (7-6)$$

Während die Terme bei $r=r_{3/2}$ wie im Strömungsinnen approximiert werden können, darf nicht gesetzt werden $\tau_{w_1} = \frac{\overline{v_x}}{\Delta r_{1/2}}$ *) da das Geschwindigkeitsprofil in Wandnähe zu stark variiert. Statt dessen wird angesetzt:

$$\tau_{w_1} = \overline{v_x} \frac{\langle \tau_{w_1} \rangle}{\langle \overline{v_x} \rangle} \quad (7-7)$$

Nimmt man nun näherungsweise - wie allgemein üblich [29, 120] - für die gemittelte Geschwindigkeit in Wandnähe ein logarithmisches Profil an:

$$\langle \overline{v_x} \rangle(r) = \frac{\langle \tau_{w_1} \rangle^{1/2}}{k} \ln [(r-R_1) E_1],$$

wobei k die Karman-Konstante ist und E_1 die Wandrauhigkeit an der inneren Wand charakterisiert, so folgt

$$\langle \overline{v_x} \rangle_1 = \frac{\langle \tau_{w_1} \rangle^{1/2}}{k} [\ln [\Delta r_1 \cdot E_1] - 1] \quad (7-8)$$

und also

$$\tau_{w_1} = \overline{v_x} \frac{k}{(\ln [\Delta r_1 E_1] - 1)} \cdot \langle \tau_{w_1} \rangle^{1/2}$$

Berücksichtigt man die Galilei-Transformation (7-4), so ist vollständig zu schreiben

$$\tau_{w_1} = (\overline{v_x} + VG) \frac{k}{(\ln [\Delta r_1 E_1] - 1)} \langle \tau_{w_1} \rangle^{1/2} \quad (7-9)$$

Für Plattenströmung mit gleichen Wandrauhigkeiten an beiden Wänden kann $\langle \tau_{w_1} \rangle$ aus einer einfachen Kräftebilanz errechnet werden zu

$$\langle \tau_{w_1} \rangle = \langle \tau_{w_2} \rangle = \frac{P_x (R_2 - R_1)}{2} = 1 \quad (7-10)$$

In allen anderen Fällen müssen die mittleren Wandschubspannungen während der Integration bestimmt werden; vergl. hierzu Kap. 7.5.

Für die Konstanten k , E_1 , E_2 wurden von Deardorff [29] unter Bezug auf die Messungen von Laufer [76] die Werte

$$k = 0.4; E_1 = E_2 = 8.8 \cdot 10^4 \quad (7-11)$$

*) $\overline{v_x}$ ist der Wert von $\overline{v_x}$ in der Wandmasche bei $n = 1$ gemäß Abb. 5

benutzt. Berechnet man das mittlere Geschwindigkeitsprofil mit dem Prandtl'schen Mischungswegmodell (2-5) und dem Mischungsweg L gemäß (2-8), so erhält man für große Abstände von der Wand das gleiche Profil, wenn die in (2-8)benutzte Konstante $A_w = 4$ gesetzt wird; A_w und $E_{1,2}$ sind also Konstanten, die beide die Wandrauhigkeiten berücksichtigen und nicht unabhängig gewählt werden dürfen. Der Wert $A_w=4$ wird daher auch in (5-88) benutzt.

7.4 Wandbedingung für die azimutale Geschwindigkeitskomponente v_φ

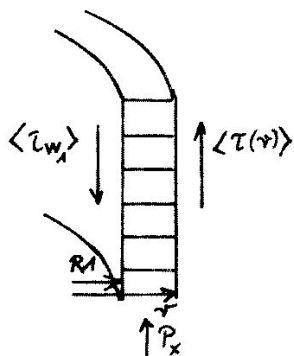
Für die Komponente \bar{v}_φ /Wand gilt im Prinzip das gleiche wie für die axiale Komponente. Da hier jedoch die mittlere Geschwindigkeit stets Null ist, wird hier gesetzt:

$$v + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) \approx \left(\tau_{\mu_1} + v \right) R \frac{2}{\Delta r_1} \left(\frac{v_\varphi}{r_1} \right). \quad (7-12)$$

Es wird hier also eine lineare Variation von $\left(\frac{v_\varphi}{r} \right)$ angenommen und die dabei entstehenden Fehler etwas durch die zusätzliche Berücksichtigung der aus dem Feinstrukturmodell resultierenden turbulenten Zähigkeit τ_μ korrigiert.

7.5 Berechnung der mittleren Wandschubspannungen

Wie bereits in Kap.7.3 erläutert, können die mittleren Wandschubspannungen $\langle \tau_{w_1} \rangle, \langle \tau_{w_2} \rangle$ nur bei Plattenströmung mit gleichen Wandrauhigkeiten an beiden Wänden aus einer Kräftebilanz unter Berücksichtigung der Symmetrie berechnet werden. In allen anderen Fällen sind $\langle \tau_{w_1} \rangle, \langle \tau_{w_2} \rangle$ aus der numerischen Lösung selbst zu berechnen. Der Rechengang wird im folgenden für die innere Wand dargestellt. Für stationäre Turbulenz folgt im zeitlichen Mittel aus einer Kräftebilanz am Ring der Wandmaschen gemäß folgender Skizze



$$\begin{aligned} \langle \tau_{w_1} \rangle &= \langle \tau(r) \rangle \frac{r}{R} \\ &+ P_x \frac{r^2 - R^2}{2 R} \end{aligned} \quad (7-13)$$

D.h. die Wandschubspannung kann aus einer Kräftebilanz berechnet werden, wenn der mittlere Schubspannungsverlauf $\langle \tau(r) \rangle$ im Inneren bekannt ist. Dieser wird aus

$$\langle \tau(r) \rangle = - \left\langle \tilde{v}_x^* \overline{v_x^*} \right\rangle + \int \mu \delta_x \langle v_x \rangle + \left\langle \int \mu \delta_r (\tilde{v}_x - \langle \tilde{v}_x \rangle) \right\rangle \quad (7-14)$$

berechnet. Zu Beginn der Integration wird die Wandschubspannung per Eingabe vorgegeben und sodann jeweils bei Erreichen der stationären Lösung nach obigen Formeln neu berechnet. Dieser Vorgang wird dann nach einiger Integrationszeit wiederholt, bis sich die Wandschubspannungen nicht mehr verändern. Anstelle der zeitlichen Mittelwerte werden als Näherung periodische Mittelwerte verwendet, was bei ausreichend großen Periodenlängen keinen Fehler bewirkt. *)

7.6 Wandbedingung für die kinetische Energie $\overline{E'}$

An der Wand verschwinden alle Geschwindigkeitsschwankungen und also ist auch die Energie der Schwankungsbewegung Null. Diese Wandbedingung läßt sich bezüglich der konvektiven Terme exakt berücksichtigen. Für die diffusiven Terme ist jedoch auch die Kenntnis des Gradienten $\frac{\partial \overline{E'}}{\partial r} \big|_{Wand}$ notwendig. Es ist nun nicht sinnvoll, diesen Gradienten aus $\frac{\partial \overline{E'}}{\partial r} \big|_{Wand} = \overline{E'}_1 / (\Delta r_1 / 2)$ zu berechnen, da $\overline{E'}$, wie Experimente [18, 76] zeigen, in unmittelbarer Wandnähe sein Maximum annimmt. Es wird daher gesetzt

$$\frac{\partial \overline{E'}}{\partial r} \big|_{Wand} = c_{11} \overline{E'}_1 / (\Delta r_1 / 2) \quad (7-15)$$

mit $0 \leq c_{11} \leq 1$. Für die Rechnungen wird in dieser Arbeit $c_{11} = 0.2$ verwendet.

Bei der Berechnung des Quelltermes der Energiegleichung sind Geschwindigkeitsdeformationsquadrate zu berechnen, wobei an den Wänden der radiale Gradient der Abweichung der Geschwindigkeiten von ihrem periodischen Mittelwert bekannt sein muß. Hier werden lineare Gradienten-Approximationen verwendet.

7.7 Wandbedingung für den Druck

Gemäß (6-12) ist zur Berechnung des Wanddruckes die Kenntnis von $\overline{\partial v_r / \partial t} / Wand$ erforderlich, wobei dies der Flächenmittelwert der radialen Beschleunigung an der Wand ist, der sich ergeben würde, wenn der Druck nicht berücksichtigt wird.

*) siehe jedoch Kap.10.4.7

Betrachtet man die Impulsgleichung dieser Komponente für ein derartiges, auf der Wand aufliegendes Maschenflächenelement, so erkennt man, daß hier wegen der Wandhaftbedingung alle Terme verschwinden bis auf den radialen Diffusionsterm:

$$\overline{\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t}} \Big|_{\text{Wand}} = \overline{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r (v_r + \mu) \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)} \Big|_{\text{Wand}} \quad (7-16)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung (1-8) folgt:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = - \frac{v_r}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (7-17)$$

Hiervon verschwinden zwar alle Terme an der Wand, nicht aber ihre radiale Ableitung. Zu deren Berechnung werden die in der Wandmasche vorliegenden Mittelwerte verwendet und also ergibt sich:

$$\overline{\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t}} \Big|_{\text{Wand}_1} = - \frac{2(v + \mu_1)}{\Delta r_1} \left[\frac{\overline{\tilde{v}_{r_{12}}}}{R_1} + \frac{\delta_\varphi \overline{\tilde{v}_{\varphi_1}}}{R_1} + \frac{r_1}{R_1} \delta_z \overline{\tilde{v}_{z_1}} \right] \quad (7-18)$$

Für die andere Wand ergibt sich eine analoge Beziehung.

8. Anfangswerte

Anfangswerte sind für die Geschwindigkeitsfelder \underline{u} und das Feld der kinetischen Energie $\sqrt{E'}$ der Feinstruktur vorzugeben. Aus Effektivitätsgründen sind diese so vorzugeben, daß sie bereits möglichst weitgehend der im statistischen Sinne stationären Lösung entsprechen.

8.1 Anfangswerte des Geschwindigkeitsfeldes

Der direkten Simulation turbulenter Strömungen liegt die Hypothese zugrunde, daß die Anfangswerte prinzipiell auf die statistischen Eigenschaften der Lösung ohne Einfluß sind, wenn diese einen statistisch stationären Zustand erreicht hat [29]^{*)}. Um die Rechenzeit bis zur Erreichung dieses stationären Zustandes klein zu halten, wird man jedoch Anfangswerte wählen, die bereits möglichst weitgehend dem stationären Zustand entsprechen. Hierzu werden von den Anfangswerten folgende Eigenschaften gefordert:

- Einhaltung der Randbedingungen;
- Übereinstimmung der mittleren Geschwindigkeiten mit entsprechenden experimentellen Angaben;
- Übereinstimmung der mittleren kinetischen Energien mit entsprechenden Meßwerten;
- Sinnvolles Energiespektrum, das bei hohen Wellenzahlen mit dem Kolmogorov-Spektrum (4-4) übereinstimmt;
- Einhaltung der Inkompressibilitätsbedingung.

Zur Erfüllung der beiden ersten Forderungen wird das mittlere Geschwindigkeitsprofil entsprechend den Messungen von Laufer [76] vorgegeben.

Die Geschwindigkeitsschwankungen um diese Mittelwerte werden zur Einhaltung der Inkompressibilitätsbedingung aus einem Vektor-Potential $\{Pot_1, Pot_2\}$ [2,121] berechnet:

$$\begin{aligned} \bar{v}_r &= \delta_z Pot_1 \\ \bar{v}_\varphi &= \delta_z Pot_2 \\ \bar{v}_z &= -\frac{1}{r} \delta_r (r Pot_1) - \frac{1}{r} \delta_\varphi (Pot_2) + \langle \bar{v}_z \rangle \end{aligned} \quad (8-1)$$

*) Die Gültigkeit dieser Hypothese wird durch die Tatsache gestützt, daß gemäß Kap.10 für verschiedene Maschennetze gleiche Ergebnisse erzielt wurden .

Man erkennt leicht, daß das so bestimmte Geschwindigkeitsfeld die Kontinuitätsgleichung in allen Maschen für beliebige Potentiale $\{\text{Pot}_1, \text{Pot}_2\}$ erfüllt.

Zur Erzeugung eines Geschwindigkeitsfeldes mit sinnvoller Energieverteilung werden die Potentiale $\{\text{Pot}_1, \text{Pot}_2\}$ unter Verwendung eines Zufallszahlengenerators mit entsprechend vorgegebener Schwankungsbreite so erwürfelt, daß die kinetische Energie im Mittel für die drei Geschwindigkeitskomponenten den Messungen von Comte-Bellot [18] entspricht. Zur Erzeugung eines Kolmogorov-Spektrums wird ein Algorithmus verwendet, der, ausgehend von je einem random vorgegebenem Wert an den Wänden und in der Mitte, die Potentialwerte jeweils zunächst auf halber Strecke zwischen Maschen mit bereits festgelegten Potentialwerten so erwürfelt, daß die daraus resultierenden Geschwindigkeiten proportional zu $r^{2/3}$ mit den Nachbarwerten korreliert sind, wobei r der Abstand zwischen den beiden Bezugsmaschen ist. Gemäß (4-5) entspricht diese Korrelation dem $k^{-5/3}$ Verlauf des Kolmogorov-Spektrums. Abb.16 zeigt ein derart erwürfeltes Geschwindigkeitsfeld und das zugehörige Energiespektrum bezüglich der axialen Wellenzahlen. Die Übereinstimmung mit dem Kolmogorov-Spektrum ist zufriedenstellend, wenngleich das erzeugte Geschwindigkeitsfeld etwas zu random erscheint; dies beruht auf der Berechnung der Geschwindigkeiten mittels Differentiation der Potentiale gemäß (8-1).

Das hier verwendete Verfahren ist lediglich heuristisch begründet. Fox -Deardorff [44] berichten andeutungsweise über ein Verfahren, bei dem das Energiespektrum in mathematisch begründbarer Weise offenbar durch Vorgabe der Fourier-Transformierten des Geschwindigkeitsfeldes den Anfangswerten aufgeprägt wird. Dies Verfahren ist jedoch in zylindrischen Koordinaten nicht anwendbar.

8.2 Anfangswerte der kinetischen Energie $\overline{v^2}$

Die kinetische Energie der Schwankungsgeschwindigkeiten innerhalb der Maschen wird aus dem Geschwindigkeitsfeld so bestimmt, daß sie bei Vernachlässigung der konvektiven und diffusiven Terme der stationären Lösung von (5-44) entspricht:

$$\frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} = c_4 h D^2 (\overline{v^2})^{1/2} - \frac{c_3}{h} (\overline{v^2})^{3/2} \stackrel{!}{=} 0 \quad (8-2)$$

$$\leadsto \overline{v^2} = \frac{c_4}{c_3} h^2 D^2 \quad (8-3)$$

9. Über das Programm TURBIT-1

Die numerische Simulation turbulenter Strömungen erfordert wegen der umfangreichen Datenmengen und großen Rechenzeiten eine möglichst optimale Programmtechnik. Die hier verwendeten Programme sind weitgehend in FORTRAN programmiert. Assembler-Programme werden zur dynamischen Kernspeicherausnutzung und zur Bestimmung der zulässigen Rechenzeit benutzt, damit vor einer eventuellen Zeitüberschreitung alle bis dahin errechneten Lösungen auf Hintergrundspeicher gerettet werden können. Eine wesentliche Grundlage der Programme bildet eine dynamische Datenverwaltung. Hierzu werden die erforderlichen Datenfelder bis auf das Hilfspotentialfeld ψ in Blöcke unterteilt. Ein Block umfaßt alle Werte einer Variablen in einer Ebene parallel zu den Wänden. Ein Unterprogrammpaket [126] verwaltet diese Blöcke, wobei aktuell nicht benötigte Blöcke, wenn der Kernspeicherplatz nicht ausreicht, automatisch auf einen Direktzugriffsspeicher ausgelagert werden. Durch entsprechende Programmierung wird erreicht, daß pro Zeitschritt jeder Block maximal nur ein Mal ausgelagert bzw. gelesen werden muß. Mit Hilfe von Assembler-Unterprogrammen wird dafür gesorgt, daß hierbei der verfügbare Kernspeicher optimal ausgenutzt wird. Unabhängig von der Anzahl der Maschen in radialer Richtung müssen zur gleichen Zeit maximal 34 Blöcke in den Kernspeicher passen. Das Unterprogrammpaket erweist sich als derart effektiv, daß die Kosten der Rechnung gerade dann ihr Minimum annehmen, wenn der Kernspeicher so klein gewählt wird, daß nur diese minimale Anzahl an Blöcken in den Kernspeicher paßt. Das Programm benötigt daher für Probleme mit 64×32 Maschen für eine Ebene parallel zu den Wänden sowie 32 Maschen in radialer Richtung (ohne Overlay für den Programm-Modul) 820 K Byte Kernspeicher; hiervon entfallen ca. 260 K auf den Platz für das Hilfspotential ψ , ca. 200 K auf die Programminstruktionen sowie ca. 30 K auf Ein-/Ausgabe-Buffer. Bei dem an der IBM 370/165 in Karlsruhe verfügbaren Kernspeicherplatz von ca. 1500 K Byte sind also Probleme mit $64 \times 64 \times 32$ Maschen rechenbar. Eine weitere erhebliche Reduzierung des Kernspeicherbedarfs wäre bei der Aufteilung des Hilfspotential ψ in Datenblöcke und Lösung der Poisson-Gleichung mit Hilfe des in [125, 128] beschriebenen Transponierungsverfahrens möglich.

Zur Vermeidung unnötiger Rechenoperationen werden alle während der Rechnung unverändert bleibenden Ausdrücke zu Beginn der Rechnung einmal berechnet. Diese Art der Optimierung kann man nicht einem optimierenden Übersetzer überlassen, da dieser nicht über mehrere Unterprogramme hinweg optimieren kann.

Weiterhin werden mehrfache Indizierungen vermieden und die stattdessen benötigten komplizierten linearen Indices ohne Multiplikationen berechnet. Zur Minimierung der Anzahl der Wurzel-Operationen wird nicht die kinetische Energie \vec{E} sondern $(\vec{E})^2$ gespeichert.

Zur Kontrolle der Rechnungen und für die Darstellung der Ergebnisse werden Unterprogramme [84, 124] zur grafischen Ausgabe der skalaren und vektoriellen Felder als Höhenlinien- bzw. Vektor-Felder verwendet, die insbesondere für zylindrische und andere krummlinige Koordinaten geeignet sind. Die Darstellungen von gemittelten Größen als Funktion des Radius bzw. Wandabstands wurden mit dem Programm GRAPHIC [39] erzeugt.

Ein großes Problem stellt der Nachweis für die Fehlerfreiheit der Programme dar. Es fehlt für die betrachteten Geometrien an Testproblemen mit analytischen bzw. anerkannten numerischen Lösungen, bei denen alle Terme der zu integrierenden Gleichungen in nichttrivialer Weise beansprucht werden. Die verwendeten Testprobleme stellen laminare Strömungen dar; vergleiche hierzu Anhang 8. Die Lösungen für turbulente Strömungen können nur anhand experimenteller Ergebnisse getestet werden. Siehe hierzu das folgende Kapitel.

Das erstellte Programm trägt den Namen TURBIT-1; TURBIT ist die Abkürzung für TURBulenter Impuls Transport.

10. Numerische Ergebnisse

10.1 Spezifikation der berechneten Fälle

Es werden zwei physikalisch verschiedene Probleme behandelt: ein Plattenkanal und ein Ringspaltkanal mit Radienverhältnis $R_2/R_1=5$. Die beiden Probleme werden mit K (kartesisch) bzw. Z (zylindrisch) gekennzeichnet. Für jeden Problemfall werden vier verschiedene Fälle K1, K2, K3, K4 bzw. Z1, Z2, Z3, Z4 betrachtet, die sich bezüglich Größe und Form der Differenzennetz-Maschen sowie der Periodenlängen unterscheiden. K1, Z1 sind die Fälle mit der kleinsten ; K4, Z4 sind die Fälle mit der größten Maschenzahl. Die genauen Angaben zur Spezifikation der insgesamt 8 Fälle enthalten die Tabellen 12 und 13. Für die Fälle K4, Z4 werden in radialer Richtung nichtäquidistante Maschen verwendet:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17
$\Delta x_3,$ $\Delta \tau$	0.018	0.02	0.022	0.027	0.033	0.038						0.040			0.042	

In den anderen Fällen werden äquidistante Maschen verwendet. Man beachte, daß die Anzahl der Maschen mit 65536 in den Fällen K4, Z4 wesentlich größer ist als die von Deardorff in [29] verwendeten 6720 bzw. in [33] 32000 Maschen. Diese Zahlen bilden programmtechnisch nicht die obere Grenze, die allein durch die verfügbare bzw. vertretbare Rechenzeit gegeben ist. Wie in Tabelle 12 angegeben, sind die Rechenzeiten erwartungsgemäß (Abb.4) bereits so groß, daß eine weitere Vergrößerung der Anzahl der Maschen nicht vertretbar erscheint.

Bei den Fällen K1-K3, Z1-Z3 wurde von randomen Anfangswerten gemäß Kap.8 ausgegangen; für die Fälle K4,Z4 wurden die Anfangswerte durch Interpolation aus den in K3, Z3 ermittelten Lösungen gewonnen. In diesem Sinne bestehen die für K4, Z4 angegebenen integrierten Zeitschritte sowie Maschinenrechenzeiten aus der Summe der für K3, Z3 sowie danach für K4, Z4 alleine aufgewendeten Werte.

Tabelle 14 zeigt die pro Zeitschritt benötigte Rechenzeit. Die Integration der $\sqrt{E'}$ -Feinstrukturenergie benötigt durchschnittlich 33%, die der Geschwindigkeiten ohne Druckkorrektur 57% und die Berechnung des Hilfspotentials ψ bzw. des Druckes p lediglich knapp 10% der Rechenzeit pro Zeitschritt.

10.2 Qualitative Beschreibung und Beurteilung der Ergebnisse

10.2.1 Räumliche Strömungsbilder

Einen Eindruck von dem Aufwand, sowie den Ergebnissen der direkten numerischen Simulation einer turbulenten Strömung vermitteln die Abbildungen 17 bis 20. In diesen Abbildungen sind räumliche "Momentaufnahmen" der Strömungsfelder in Form von Vektor- und Höhenlinienzeichnungen dargestellt. Hierbei handelt es sich jeweils um eine willkürlich herausgegriffene Ebene des Strömungsraumes. Von den Geschwindigkeiten wird stets nur das Schwankungsfeld $\bar{u}'' \equiv \bar{u} - \langle \bar{u} \rangle$ dargestellt, wobei die Geschwindigkeitskomponenten innerhalb der Zeichenebene durch Vektoren gekennzeichnet sind, die vom betrachteten Ort ausgehen und in Länge und Richtung dem Geschwindigkeitsvektor entsprechen; die senkrecht zur Zeichenebene vorherrschende Schwankungsgeschwindigkeit ist durch Höhenlinien mit konstantem Niveauunterschied wiedergegeben. Man erhält hierdurch ein plastisches Bild der Strömungsvorgänge. Daneben enthalten die Abbildungen 18, 19, 20 Höhenlinien-Darstellungen der Feinstrukturenergie $\bar{\epsilon}''$ sowie des durch (6-3) definierten Druckes p . Hierbei sind Höhenlinien zu negativen Funktionswerten gestrichelt und die zu positiven durchgezogen gezeichnet; letztere tragen zudem Markierungen die zur Identifizierung der Höhe anhand nebenstehender Legende dienen. Die Darstellungen tragen an den Rändern Markierungen, die den Abstand der Maschen charakterisieren. Bei den Vollringdarstellungen liegen diese Markierungen teilweise innerhalb des Strömungsraumes (z.B. Abb. 17). Man erkennt hier übrigens deutlich die nichtäquidistanten radialen Maschenweiten sowie die Einhaltung der periodischen Randbedingungen.

Das wichtigste Ergebnis, das diese Bilder verdeutlichen, ist die Tatsache, daß die dargestellten Strömungsfelder tatsächlich so unregelmäßig erscheinen, wie man sich eine turbulente Strömung vorstellt. Diese Tatsache ist ein gewichtiges Argument für die formale Fehlerfreiheit des verwendeten Programms, denn viele Programmfehler führen erfahrungsgemäß zu irgendwelchen, physikalisch nicht erklärbaren Regelmäßigkeiten.

Die erkennbaren systematischen Erscheinungen sind dagegen gerade so, wie man es physikalisch erwartet. So stellt man überall fest, daß in Wandnähe die größten Schwankungsbewegungen auftreten; also gerade dort, wo die Produktion an kinetischer Energie wegen der großen Geschwindigkeitsgradienten erwartungsgemäß groß ist. Wegen der großen Geschwindigkeitsschwankungen sind hier auch

die $\overline{v_E}$ -Werte maximal und die Drücke extremal. Besonders interessant sind die in Abb.19 deutlich erkennbaren, schräg in Strömungsrichtung von der Wand zur Mitte sich hinziehenden Feinstrukturspitzen. Es könnte sich hier um einen der vielfach beobachteten Intermittenz-Vorgänge handeln [89, 115, 120], bei denen in großen Bereichen relative Ruhe herrscht und die dabei aufgestaute Energie gelegentlich stoßartig von der Wand zur Mitte transportiert wird. Die Bilder für die Probleme mit vielen Maschen sind zu verwirrend, als daß man die Bewegungen im einzelnen verfolgen könnte. Hierzu ist Abb.20 für den Fall Z1 schon eher geeignet.

10.2.2 Zeitfunktionen und Spektren

Abb.21 demonstriert das Strömungsverhalten als Funktion der Zeit an einem Ort bei $r=0.844$, wo gemäß Abb.44 die mittlere Schubspannung $\langle v_r' \cdot v_x' \rangle$ positiv ist. Dargestellt sind die Geschwindigkeitskomponenten sowie die daraus berechnete makroskopische Energie, das momentane Produkt $v_r \cdot v_x$ sowie die Feinstrukturenergie $\overline{v_E}$ von $t=0$ an, wo randome Anfangsbedingungen vorliegen bis $t \approx 5$. In realen Dimensionen entspricht diese dimensionslose Zeit bei $\hat{D} = 18$ cm, $Re_m = 240\,000$ und $\hat{u}_0 = 0.80$ m/s gemäß [18] etwa einer Sekunde in realer Zeit. Vielleicht sollte man hier eine noch stärker schwankende Bewegung erwarten; man muß jedoch bedenken, daß infolge der räumlichen Mittelung über einzelne Maschen auch die zeitlichen Funktionen geglättet werden. Man sieht aus dieser Abbildung, daß die Strömung offensichtlich keiner echt stationären Lösung zustrebt (wie bei laminarer Strömung). Zudem sieht man, daß nach einiger Zeit die "Reynolds-Spannung" $v_x \cdot v_r$ tatsächlich überwiegend positiv ist.

Von den dargestellten Zeitfunktionen wurden Energiespektren berechnet und in Abb.21 unten rechts aufgetragen. Aufgrund der nicht vorhandenen Periodizität entsteht bei großen Frequenzen (hier umgerechnet in dimensionslose Wellenzahlen) ein offensichtlich großer Beitrag des Aliasing-Fehlers [50,9]. Die daneben dargestellten Spektren der räumlichen Funktionen $v_x(x)$, $v_r(x)$, $v_t(x)$ haben derartige Fehler nicht, weil diese Funktionen modellimmanent periodisch sind. Dennoch zeigen beide Spektrenarten Ähnlichkeiten der Art, daß es in der Mitte einen Bereich entsprechend $k^{-5/3}$ gibt, der bei hohen Wellenzahlen proportional k^{-7} abfällt. Dies zeigt sich deutlich auch bei den Spektren für die Fälle K4, Z3 (Abb.22), wo in axialer Richtung mehr Maschen und folglich mehr Wellenzahlen darstellbar sind.

10.2.3 Problem der Mittelwertbildung

Unabhängig von den räumlichen Momentaufnahmen bzw. den instationären Variationen an einem Ort sollte die Strömung in ihren statistischen Eigenschaften einem stationären Zustand zustreben. In Kap. 10.4.1 wird diskutiert, ob dieser Zustand erreicht wird. Im stationären Zustand sollte bei großer Anzahl von Maschen in den x - φ - bzw. x_1 - x_2 -Ebenen die zeitliche Mittelung durch periodische Mittelung über diese Ebenen ersetzbar sein. Die Gültigkeit dieser Annahme wurde bei der Auswertung der Ergebnisse stets angenommen. Da sie aber unter den gegebenen Bedingungen (nicht ganz stationär, nur wenige Punkte) nicht tatsächlich zutreffend ist, zeigen die in den Abbildungen 26 bis 64 dargestellten Periodenmittelwerte große Schwankungen. Der Ersatz der Periodenmittelung durch zeitliche Mittelung alleine ist nicht praktikabel. So zeigt z.B. Abb. 65 die Geschwindigkeiten an einem Ort als Funktion der Zeit für den Fall K3. Zur Erzeugung dieser Kurve ist eine Rechenzeit von 2 Stunden auf einer IBM 370/165 erforderlich und offensichtlich ist diese Rechenzeit nicht genügend, um Mittelwerte mit ausreichend kleinen Schwankungsbreiten zu errechnen. Die Kombination beider Mittelungen wäre wünschenswert. Hierbei müßten dann jedoch alle Auswertungen gleichzeitig mit der Integration erfolgen, denn eine Zwischenspeicherung der Daten für spätere Auswertungen ist bei den Fällen mit 65 000 Maschen nahezu unmöglich; man halte sich vor Augen, daß die Werte der drei Geschwindigkeitskomponenten plus der Feinstrukturenergie hierbei pro Zeitschritt 10^6 Byte Speicherplatz benötigen; ein Magnetband faßt vergleichsweise ca. 10^7 Byte.

10.2.3 Anteil der makroskopischen Struktur an den turbulenten Vorgängen

In den Abb. 43 und 44 sind für je einen Platten- und Ringspaltkanal die Schubspannungen als Funktion des Radius (bzw. Wandabstandes) dargestellt. Hierbei ist lediglich der schraffierte Bereich auf das Feinstrukturmodell gemäß Kap. 5.2.3.1 zurückzuführen. Damit sehen wir also das erfreuliche Ergebnis, daß der überwiegende Anteil des Impulstransportes durch die makroskopische Struktur realisiert wird. Das hier verwendete Verfahren simuliert den turbulenten Impulstransport also tatsächlich vorwiegend durch die direkte Integration der Navier-Stokes-Gleichungen.

In den Abb. 34 und 35 ist die kinetische Energie der Lösungen aufgeschlüsselt nach ihren Berechnungsverfahren. Der Anteil zwischen der Nulllinie und der ersten Kurve entspricht der Feinstrukturenergie $\overline{E'}^v$ gemäß Kap. 5.2.2. Der folgende Bereich wurde gemäß (5-92) berechnet; er ist nur in Wandnähe, und auch da nur gering von Null verschieden. Der darüberliegende Bereich ist

schließlich die von der makroskopischen Struktur wiedergegebene Energieanteil. Dieser Energieanteil ist offensichtlich nicht wesentlich größer als der Anteil der Feinstruktur; die hierfür verwendeten Modelle sind also für die lokalen Vorgänge von nicht vernachlässigbarer Bedeutung.

In den folgenden Kapiteln werden noch an mehreren Stellen Einzelergebnisse diskutiert, die die physikalische Glaubwürdigkeit des Verfahrens unterstützen. Insbesondere wird wohl deutlich, daß schon die relativ groben Auflösungen in den Fällen K2, Z2 vernünftige Ergebnisse erbringen; der große Aufwand für die feinere Auflösung in den Fällen K4, Z4 also für zukünftige Fragestellungen nicht unbedingt notwendig sein wird.

10.3 Quantitativer Vergleich mit Experimenten

10.3.1 Maximale Geschwindigkeit

Im folgenden wird das errechnete Maximum des mittleren Geschwindigkeitsprofils \overline{u}_{\max} mit entsprechenden Angaben aus der Literatur verglichen; siehe hierzu Tabelle 15.

Die Übereinstimmung der errechneten mit den gemessenen Werten bei entsprechender Reynolds-Zahl liegt nahezu innerhalb der experimentellen Meßfehler.

Für den Ringspalt wird von Barthels [11] und Maubach [88] eine Verkleinerung der maximalen Geschwindigkeit um 1-2% im Vergleich zur Plattenströmung vorhergesagt. Die hier berechneten Werte liegen um 0-10% unter denen für Plattenströmung. Die Tendenz wird also richtig wiedergegeben.

10.3.2 Geschwindigkeitsprofil

Abb.26 zeigt für Plattenströmung die berechneten Geschwindigkeitsprofile. Die von Comte-Bellot [18] und Laufer [76] berichteten Meßwerte sind gestrichelt eingezeichnet. Die Unterschiede zwischen Meßwerten und numerischen Ergebnissen sind dabei kaum erkennbar. Die Profile für Ringspaltströmung gemäß Abb.27 zeigen die erwarteten Verschiebungen der Maxima zum inneren Rand. Besser als die graphische Darstellung des Profils ist die Differenz zwischen maximaler und mittlerer Geschwindigkeit ein Maß für die Übereinstimmung der errechneten mit den gemessenen Profilen. Die entsprechenden Zahlen enthält Tabelle 16.

Man erkennt, daß die berechneten Werte gut mit den Meßwerten übereinstimmen. Ganz deutlich ist hier eine Verbesserung der Ergebnisse im Vergleich zu denen von Deardorff festzustellen. Dies dürfte vorwiegend auf die Aufteilung des Feinstrukturmodells in einen lokalisotropen und einen inhomogenen Anteil zurückzuführen sein (Kap.5.2.1).

10.3.3 Schwankungsgeschwindigkeiten

In den Abb.28-30 sind die mittleren Geschwindigkeitsschwankungen $\sqrt{\langle u_{z,i}^2 \rangle}$ für die verschiedenen Komponenten für Plattenströmung aufgetragen. Entsprechende Ergebnisse zeigen die Abb.31-33 für den Ringspalt. Für Plattenströmung wurden zum Vergleich die Meßwerte von Comte-Bellot (gestrichelt) mit eingezeichnet. Die Übereinstimmung der mittleren Beträge kann als gut bezeichnet werden. Die numerischen Werte zeigen keine ganz so große Variation mit dem Wandabstand wie die experimentellen. Dies liegt zum Teil daran, daß die Feinstrukturenergie entsprechend der Lokalisotropie-Annahme jeweils gleichmäßig den verschiedenen Komponenten zugeordnet wurde. Auf jeden Fall sind diese Ergebnisse wesentlich besser als die von Deardorff [29] berichteten. Dort liegen die Beträge der Schwankungsgeschwindigkeiten durchweg wesentlich höher als die Meßwerte. In Wandnähe wurden beispielsweise für die axialen Geschwindigkeitsschwankungen Maxima von 5 angegeben; dies ist etwa doppelt so groß wie der entsprechende Meßwert von Comte-Bellot [18]. Auch hier wird die verbesserte Übereinstimmung als Folge der Auftrennung in ein lokalisotropes und ein inhomogenes Feinstrukturmodell angesehen.

In den Abb.31-33 ist erkennbar, daß (mit Ausnahme von Z4) die Geschwindigkeitschwankungen bei Ringspaltströmung am inneren Rand kleiner als am äußeren Rand sind. Dies entspricht den physikalischen Realitäten insofern, als für $R1/R2 \rightarrow 0$, d.h. für ein Kreisrohr, die Schwankungsintensität ähnlich wie bei der Platte, in der Mitte ein Minimum annimmt. Die Abweichung bei Z4 wird auf nicht ausreichende Stationarität zurückgeführt (vergl.Kap.10.4.1).

10.3.4 Axiale Korrelationen

Die Zwei-Punkt-Korrelationen der axialen Geschwindigkeitskomponenten in axialer Richtung wurden errechnet und im Vergleich zu den Meßwerten von Comte-Bellot [18] in den Abb.36 für $x_z=0.5$ (Mitte) und 37 für $x_z=0.031$ (Wandnähe) dargestellt.

Die Übereinstimmung der numerischen Werte ist für die Fälle K2-K4, bei denen die Periodenlänge 4 beträgt, im Rahmen der statistischen Streuungen zufriedenstellend. Entsprechende Korrelationen für die anderen Geschwindigkeitskomponenten sind für $x_3=0.5$ in Abb.38 dargestellt. Vergleichsmessungen sind hier nicht bekannt. Die Korrelationskurven bestätigen deutlich das von Deardorff festgestellte Ergebnis [29], wonach die axiale Komponente über größere axiale Strecken hinweg korreliert ist, als die anderen beiden Komponenten. Dieses Ergebnis wurde jedoch vor Deardorff schon von Comte-Bellot [18] durch Bestimmung der Korrelationslängen aus Spektrenmessungen gefunden. Diese Korrelationslängen sind in den Abb.39 bis 41 für die Plattenkanäle aufgetragen. Die gestrichelte Kurve entspricht den Messungen von Comte-Bellot. Auch hier kann die Übereinstimmung als zufriedenstellend angesehen werden. Entsprechende Ergebnisse - allerdings ohne experimentellen Vergleich - zeigt Abb.42 für einen Ringspalt.

10.4 Einfluß der Modellparameter

10.4.1 Integrationszeit (Stationarität)

Es ist nicht ganz problemlos zu entscheiden, ob die Lösungen, über die hier berichtet wird, im statistischen Sinne als stationär zu betrachten sind. Die Periodenmittelwerte schwanken noch nach relativ langer Integrationszeit stark. Dies zeigen besonders deutlich die Abb.45 und 46, in denen die Periodenmittelwerte der Beschleunigungen dargestellt sind. Beachtet man, daß der Druckgradient lediglich eine Beschleunigung vom Betrage 2 bewirken kann, so sind die Schwankungen der mittleren Beschleunigungen erstaunlich groß. Dies gilt auch für die Fälle Z1 und Z2, wo die gemäß (1-41) notwendige "Einlaufzeit" weit überschritten wurde. Lediglich aus der Systematik der Variationen der Beschleunigungen für die Fälle K4, Z4 kann man daher schließen, daß zumindest hier der stationäre Zustand noch nicht erreicht wurde. Ein besseres Maß für die Annäherung an den stationären Zustand ist der zeitliche Verlauf der über das gesamte Strömungsvolumen zu einem Zeitpunkt gemittelten makroskopischen Energie $\langle \bar{E} \rangle$ sowie der Feinstrukturenergie $\langle \bar{E}' \rangle (t)$. Für die Fälle K1 und Z3 sind diese Größen als Funktion der Zeit in Abb.47 aufgetragen. Während die Schwingungen bei K1 deutlich kleiner werden, ist entsprechendes für Z3 nur weniger ausgeprägt festzustellen. Aus diesen und ähnlichen Kurven folgt: Als hinreichend stationär kann man die Lösungen K1, K2, Z1, Z2 ansehen;

bei den Fällen K3, Z3 dürften die Abweichungen unwesentlich sein; die Fälle K4, Z4 sind jedoch noch nicht stationär im statistischen Sinne. Andererseits ist eine wesentliche Verlängerung der Problemzeit in den Fällen K4, Z4 wegen der großen Rechenzeiten kaum vertretbar.

10.4.2 Periodenlängen

Ein Maß für die ausreichende Größe der Periodenlängen X_1 , X_2 bzw. X, \emptyset bilden die Abweichungen der Zwei-Punkt-Korrelationen für Abstände $X_1/2$, $X_2/2$ bzw. $X/2$, $\emptyset/2$ von Null. Axiale Korrelationskoeffizienten wurden bereits in Kap.10.3.4 diskutiert. Eine anschauliche Vorstellung der Korrelationen vermitteln zudem die Abb.24 und 25. In Abb.24 sind mittels Höhenlinien für K1, K2, K3 dargestellt:

$$R_{ii}(x_3, x_1) = \frac{\overline{u_i(x'_1, x'_2, x_3) \cdot u_i(x'_1 + x_1, x'_2, x_3)}}{\overline{u_i(x'_1, x'_2, x_3)^2}}$$

Entsprechend zeigt Abb.25 für die Fälle Z1, Z2, Z3:

$$R_{ii}(\tau, \varphi) = \frac{\overline{u_i(x', \varphi', \tau) \cdot u_i(x', \varphi' + \varphi, \tau)}}{\overline{u_i(x', \varphi', \tau)^2}}$$

Die offensichtlichen Symmetrien sind eine Konsequenz der Periodizität und der Periodenmittelung. Man erkennt aus Abb.24 und 25, daß die Korrelationen mit wachsendem Abstand der korrelierten Punkte zunächst rasch abfallen und daß dieser Effekt in allen Fällen etwa gleich gut wiedergegeben wird. Auf halber Strecke der Periodenlängen kann man jedoch nur bei den Fällen mit $X_1=4$ bzw. $\emptyset = 2$ von hinreichend kleinen Korrelationen sprechen (um $\pm 10\%$). Bei den Fällen K1 und Z1 sind dort jedoch noch erhebliche Korrelationen (K1: $\pm 20\%$; Z1: -60%) feststellbar. Die Periodenlängen $X_1=2$ bzw. $\emptyset = \pi$ sind demnach nicht ausreichend. Aus ähnlichen Bildern für Plattenströmung folgt auch, daß $X_2=1$ zu klein ist; dies zeigt einen markanten Mangel der Deardorffschen Rechnungen mit $X_2=0.7$. Dagegen erscheinen die bei K2-K4, Z2-Z4 gewählten Periodenlängen als ausreichend.

10.4.3 Maschengröße

Für den numerischen Aufwand sind neben den Periodenlängen die erforderlichen Maschengrößen von entscheidender Bedeutung. Die Forderung $KM > 30$ als Voraussetzung für die Existenz lokaler Isotropie ist lediglich bei den Fällen K4, Z4 gegeben. Immerhin konnte gezeigt werden, daß es praktisch möglich ist,

diese Voraussetzungen zu realisieren. Wie aus den bereits diskutierten Ergebnissen, sowie aus den Abbildungen 26 bis 64 hervorgeht, sind die gemittelten Ergebnisse für die Fälle mit unterschiedlichen Maschengrößen nicht signifikant voneinander verschieden. Zudem wurden alle Fälle der gleichen Geometrie mit stets gleichen Programmen und Modellkonstanten gemäß Tabelle 13 realisiert. Diese Ergebnisse zeigen, daß bereits mit einem Aufwand, wie er für die Fälle K2, Z2 benötigt wurde, physikalisch sinnvolle Ergebnisse berechenbar sind.

10.4.4. Zeitschritt Δt

Für den Fall K2 wurde, ausgehend von der Lösung bei $t=3.8$ über eine zusätzliche Zeitspanne von 0.096 integriert. Hierbei werden 3 Fälle betrachtet:

Fall a)	$\Delta t = 0.0015$	} beide mit j_{c9} gemäß (5-73)
Fall b)	$\Delta t = 0.003$	
Fall c)	$\Delta t = 0.003$	
		j_{c9} gemäß (5-73) berechnet wie für $\Delta t=0.0015$

Die Fälle b) und c) ergaben Ergebnisse, die sich bezüglich der Geschwindigkeiten um ca.1% (bezogen auf die gesamte Änderung innerhalb dieser Zeitspanne von 0.096) von den Lösungen des Falles a) unterscheiden. Hierbei liegen die Ergebnisse des Falles b) bezüglich der berechneten Feinstrukturenergie näher an der Bezugslösung des Falles a) als die gemäß Fall c); dies spricht also für die Richtigkeit des Korrekturfaktors j_{c9} ; dagegen liegen die Verhältnisse bezüglich der gemittelten Geschwindigkeiten gerade umgekehrt. Aufgrund dieser Erfahrungen ist für zukünftige Rechnungen ein Korrekturfaktor j_{c9} zu empfehlen, der etwas schwächer mit Δt variiert, als es Gl.(5-73) angibt.

Die Variation der momentanen Ergebnisse mit kleiner werdendem Zeitschritt kann nicht als vernachlässigbar klein bezeichnet werden. Diese Erfahrung wird auch in [44] berichtet. Im statistischen Sinne scheinen die Auswirkungen jedoch klein zu sein. Eine exaktere Untersuchung steht hierzu jedoch noch aus.

10.4.5 Effekt der Integration der Feinstrukturenergiegleichung

Für den Fall K1 wurde, ausgehend von der Lösung bei $t=5.6$, über eine zusätzliche Problemzeit von 1.8 integriert; hierbei wurde einmal \overline{E} durch Integration der dafür abgeleiteten Transportgleichung, zum anderen - entsprechend der von Dearn-dorff verwendeten Methode - aus (8-3) bestimmt, also ohne hierfür eine zusätz-

liche Transportgleichung zu integrieren. Im zweiten Fall ergaben sich zunächst größere Energien in den Wandmaschen, was durch den fehlenden konvektiven und diffusiven Transport erklärt ist; diese höheren Feinstrukturenergien führen sodann zu einer entsprechend größeren Dämpfung der Grobstruktur-Schwankungen. Dennoch unterscheiden sich die statistischen Mittelwerte schließlich nur geringfügig. Dies ist ein erstaunliches Ergebnis; hätte man doch erwartet, daß die Integration dieser zusätzlichen Transportgleichung, die insbesondere die unter a) in Kap.5.1.2 genannte Schwäche des Deardorffschen Modells vermeiden hilft, von wesentlicher Bedeutung für die Genauigkeit der Ergebnisse ist. Tatsächlich kann man jedoch zeigen, daß auch bei Berechnung der Feinstrukturenergien aus einer Transportgleichung diese insbesondere bei kleinen Maschenkanten h nahezu vollständig mit dem Quellterm P gemäß (5-44) korreliert ist. Um dies deutlich zu zeigen, wurde mit DYSYS [122] folgendes Anfangswertproblem integriert, das als Modell der Gleichung (5-44) angesehen werden kann.

$$\frac{dE}{dt} = c_4 \cdot h \cdot D^2 E^{1/2} - \frac{c_3}{h} E^{3/2}$$

$$E(t=0) = E_0(0)$$

$$E_0(t) = \frac{c_4}{c_3} h^2 D^2$$

$$c_3 = 1, \quad c_4 = 1.6$$

Für die Deformationsgeschwindigkeit wird eine harmonische Funktion angenommen, deren Mittelwert mit den tatsächlichen Werten etwa übereinstimmt:

$$D^2 = 5 h^{-4/3} \cdot (1 + \sin(t))$$

Der Faktor $h^{-4/3}$ folgt aus (4-34). Abb.66 zeigt die errechneten Ergebnisse für $h = 0.01, 0.1$ und (um den Effekt ganz deutlich zu machen) $h = 1$. Man erkennt hieraus, daß die Korrelation zwischen $E(t)$ und der dem einfacheren Modell entsprechenden Energie $E_0(t)$ um so größer ist, je kleiner h ist. Deutliche Unterschiede ergeben sich lediglich für die unnatürlich großen Maschenweiten $h = 1$. Damit haben wir das für zukünftige praktische Rechnungen sehr erfreuliche Ergebnis gezeigt, daß der Aufwand für die zusätzliche Integration der Energiegleichung nicht notwendig ist; allerdings ist der dabei einzusparende Aufwand nicht sonderlich bedeutsam, da der größte Anteil der Rechenzeit zur Berechnung des Quelltermes benötigt wird.

10.4.6 Die Korrekturkonstanten $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Ein weiteres Maß für die Korrelation zwischen der Feinstrukturenergie und der makroskopischen Deformationsgeschwindigkeit ist der durch (5-82) definierte Faktor σ_3 . Dieser, sowie die Faktoren σ_1, σ_2 gemäß (5-14, 15), wurden numerisch ermittelt und in den Abbildungen 48 und 49 für die Fälle Z2 und K4 aufgetragen. Man erkennt zwar, daß die Faktoren σ_1, σ_2 deutlich näher an dem vorausgesetzten Wert 1 liegen als der in früheren Theorien zu 1 angenommene Wert σ_3 . Jedoch sind die Abweichungen von 20% nicht gravierend. Wie die Abbildungen zeigen, sind diese Faktoren weitgehend unabhängig vom Ort, der Maschengröße sowie der Kanalgeometrie und können daher in zukünftigen Rechnungen wie "universelle" Konstanten berücksichtigt werden:

$$\sigma_1 \approx 1.05, \quad \sigma_2 \approx 1.1, \quad \sigma_3 \approx 1.2$$

Der hier angegebene Wert für σ_1 steht im Widerspruch zu der Angabe in Tab. 13 wie im folgenden erläutert.

10.4.7 Probleme des Modells

Bei den ersten Testrechnungen mit den in Kap. 3 bis 8 beschriebenen Verfahren traten zunächst unerklärlich große axiale Korrelationen auf; ein Teil dieses Effektes konnte gemäß Anhang 7 erklärt und korrigiert werden. Zusätzlich zeigte sich, daß die berechneten Zähigkeiten des lokalisotropen Feinstrukturmodells zu groß sind. Mit Hilfe entsprechend künstlich veränderter Werte der Konstanten σ_1 gemäß Tabelle 13 konnte diese Tatsache umgangen werden. Der Grund für diese Schwäche des Feinstrukturmodells wird in der fehlenden Berücksichtigung der in Kap. 5.2, 2.5.2 prinzipiell vorgeschlagenen Korrektur c_d gesehen. Diese Korrektur soll der Abweichung des tatsächlichen Spektrums vom Kolmogorov-Spektrum bei kleinen Wellenzahlen Rechnung tragen. Es fehlt hierzu jedoch an quantitativen Aussagen für die Längen L gemäß (5-77,78).

Weiterhin mußte festgestellt werden, daß die Berechnung der Wandschubspannungen gemäß Kap. 7.5 nicht realisiert werden kann, da bei den verwendeten Periodenmittelungen hierfür zu große Schwankungen auftreten. Das verwendete Verhältnis der Wandschubspannungen entspricht den Angaben von Barthels [11].

10.5 Bestimmung von Turbulenzmodell-Konstanten

10.5.1 Zum Energie-Länge-Modell

10.5.1.1 Berechnung der zu approximierenden Größen

Um die Brauchbarkeit der direkten numerischen Simulation zur Unterstützung von Turbulenzmodellen zu beweisen, werden gemäß Kap.2 zunächst die durch (2-13) definierte Länge L sowie der in (2-14) definierte Längen-Produktionsterm L -PROD berechnet. Für den Ringspalt werden Integrale $\int_0^1 y^+ dr$ ersetzt durch

$$\frac{\int_{R_1}^{R_2} y(r) r dr}{\int_{R_1}^{R_2} r dr}$$

Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 52 bis 55 dargestellt. Die Länge L nimmt mit dem Wandabstand Z zunächst stärker als $k \cdot z$ (k =Kármán-Konstante) zu und erreicht in der Mitte Maxima von ca.0.17. Der prinzipielle Verlauf entspricht den physikalischen Erwartungen. Der Längenproduktionsterm ist in der Mitte etwa Null und steigt zu den Wänden hin an; das Verschwinden des Produktionsterms in der Mitte ist sinnvoll, da er für homogene Turbulenz identisch Null ist.

10.5.1.2 Berechnung der Konstanten a_1

Da neben der Länge L auch die Schubspannungen $\rho \langle u'w' \rangle$, die kinetische Energie $\rho \langle E' \rangle$ sowie das mittlere Geschwindigkeitsprofil bekannt sind, kann die "Konstante" a_1 entsprechend (2-9) für jeden Ort z aus

$$a_1(z) = \frac{-\rho \langle u'w' \rangle}{\rho \langle E' \rangle^{1/2} \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z}}$$

berechnet werden. Die Ergebnisse sind in den Abb.56,57 dargestellt. Zunächst wird hieraus deutlich, daß die "Konstante" keine echte "Konstante" ist. Die Rechnungen ergeben eine schwache Zunahme der "Konstanten" mit dem Wandabstand. Die großen Schwankungen in der Mitte sind eine Konsequenz der mathematischen Unbestimmtheit der Definition (0/0); die negativen Werte zeigen, daß die Vorzeichen von $\langle u'w' \rangle$ und $\partial \langle u \rangle / \partial z$ unterschiedlich sein können, wie auch von Maubach-Rehme [90] diskutiert. Aufgrund der großen Schwankungen wird der Mittelwert a_1 aus $a_1(z)$ gewichtet mit $\langle u'w' \rangle$ berechnet. Die dabei berechneten Ergebnisse lauten :

Fall	K1	K2	K3	K4	Z1	Z2	Z3	Z4
a_1	0.0848	0.0835	0.0685	0.0672	0.0906	0.091	0.0592	0.0463

Der mittlere Wert liegt etwa bei 0.075. Die Tatsache, daß dieser Wert kleiner ist als üblich angenommen ist, folgt aus den relativ großen Werten der Länge in Wandnähe.

10.5.1.3 Bestimmung der Konstanten a_4 und a_5

Zunächst wird a_5 als identisch Null angenommen und lediglich a_4 betrachtet. Die aus der Definition

$$q_4(z) = \frac{L-PROD}{a_4 \sqrt{\langle E' \rangle} \left(L \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \right)^2}$$

berechneten Werte für a_4 als Funktion des Ortes sind in den Abb. 58, 59 dargestellt. Ähnlich a_1 führt die Unbestimmtheit der Definitionsgleichung in der Mitte zu großen Schwankungen. Unabhängig davon ist jedoch eine deutliche Zunahme der "Konstanten" a_4 mit dem Wandabstand sichtbar. Die mit $L-PROD(z)$ gewichteten Mittelwerte von a_4 sind:

Fall	K1	K2	K3	K4	Z1	Z2	Z3	Z4
a_4	1.049	0.775	1.17	0.513	0.655	0.748	1.12	0.50

Der generelle Mittelwert liegt bei $a_4 = 0.8$.

Aufgrund der offensichtlichen Variation mit dem Wandabstand ist die Berücksichtigung weiterer Terme zur Approximation der Längen-Produktion wünschenswert. Verwendet man hierzu den von Rotta vorgeschlagenen zusätzlichen Term mit der Konstanten a_5 , so ergeben sich die Werte a_4, a_5 für die einzelnen Fälle aus dem Minimum folgenden Ausdruckes $f(a_4, a_5)$:

$$f(a_4, a_5) = \int_{R1}^{R2} \left\{ L-PROD(\tau) - \left[a_4 \sqrt{\langle E' \rangle} \cdot L \cdot \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \tau} \left(a_4 \cdot L \cdot \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial \tau} + a_5 \cdot L^3 \frac{\partial^3 \langle u \rangle}{\partial \tau^3} \right) \right]^2 \right. \\ \left. \cdot L-PROD(\tau) \cdot \tau d\tau \right\} \stackrel{!}{=} \text{Min}$$

Die hierbei gefundenen Ergebnisse zeigt folgende Aufstellung:

Fall	K1	K2	K3	K4	Z1	Z2	Z3	Z4
a_4	1.08	0.78	1.6	0.9	0.47	0.44	0.95	0.65
a_5	-0.13	-1.5	-1.1	-1.2	0.39	0.92	0.40	-0.13

Man erkennt hieraus:

- Die Beträge der Konstanten lassen sich hier nur mit großen Unsicherheiten berechnen.
- Die Beträge der Konstanten a_5 liegen in der gleichen Größenordnung wie die von a_4 ; die Vernachlässigung des mit a_5 gewichteten Zusatzterms erscheint also als nicht gerechtfertigt.
- Für die Platte und den betrachteten Ringspalt sind die optimalen Werte von a_4 , a_5 unterschiedlich; bei der Platte gilt im Mittel

$$a_4 = 1. \quad a_5 = -1.$$

bei dem Ringspalt mit $R_2/R_1 = 5$:

$$a_4 = 0.6, \quad a_5 = 0.4$$

Der Grund für diese Unterschiede könnte darin liegen, daß das Minimum des Produktionsterms beim Ringspalt näher an der inneren Wand als das Maximum des mittleren Geschwindigkeitsprofils liegt, während der Näherungssatz voraussetzt, daß diese Orte zusammenfallen. Aus diesen Ergebnissen wird deutlich, daß sowohl zur Approximation der Schubspannungen als auch des Längenproduktionstermes neue Ansätze entwickelt werden sollten, bei denen die Koinzidenz des Nullpunktes dieser Größen mit dem Maximum des mittleren Geschwindigkeitsprofils nicht bereits vom Ansatz vorausgesetzt wird.

10.5.2 Zur Druck-Deformationsgeschwindigkeits-Korrelation

10.5.2.1 Berechnung der zu approximierenden Terme

Turbulenzmodelle, die für $\langle u_i' u_j' \rangle$ Transportgleichungen enthalten, benötigen Modelle für die Korrelationen

$$p u_{i,j} \equiv \left\langle p' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle$$

Diese Terme bewirken den Energieaustausch von Schwankungskomponenten großer Intensität auf solche kleinerer Intensität [108, 115, S.123, 53, S.253]. Obige Korrelationen wurden allein aus der Grobstruktur der numerischen Lösungen berechnet. Abb.60 und 61 zeigen PU_{11} , PU_{22} , PU_{33} , PU_{13} für je einen Platten- bzw. Ringspaltkanal. In Abb.62 sind die verschiedenen Ergebnisse für PU_{11} alleine dargestellt. Abb.60 und 61 machen deutlich, daß die berechneten Korrelationen dem erwarteten Verlauf entsprechen. PU_{11} ist negativ während PU_{22} , PU_{33} positiv sind; es wird also durch den Druck Energie von der axialen auf die anderen Komponenten übertragen; PU_{13} zeigt die gemäß Rotta [108] erwartete negative Proportionalität zu der Schubspannung $\langle u_1' u_3' \rangle$. Abb.62 zeigt zwar Unterschiede in den Beträgen der Korrelationen für die verschiedenen Fälle; die Tatsache, daß die Beträge nicht mit der Anzahl der Maschen anwachsen, beweist anscheinend, daß die betrachteten Korrelationen tatsächlich durch die Grobstruktur dargestellt werden; im Gegenteil ist PU_{11} für den Fall K4 betragsmäßig am kleinsten; dies kann vielleicht auf mangelhafte Stationarität zurückgeführt werden.

10.5.2.2 Bestimmung der Konstanten k_p

Verwendet man den Modellansatz von Rotta (A1-48), wobei $\langle \varepsilon \rangle$ berechnet wird aus

$$\langle \varepsilon \rangle = a_2 \cdot \frac{\langle E' \rangle^{3/2}}{L}$$

mit L gemäß Kap.10.5.1.1 und als Arbeitswert

$$a_2 = 1,$$

so kann die "Konstante" k_p berechnet werden. Wie erwartet (A1-48 gilt nur für homogene Turbulenz [108]) ergeben sich unterschiedliche Werte $KP_{ij}(z)$ für verschiedene Indices i, j von PU_{ij} und verschiedene Orte z , wie in Abb.63,64 aufgetragen. In der Regel sind jedoch die Werte, wie vorhergesagt, überall positiv. Der mittlere Wert liegt bei 0.5. Verwendet man anstelle von $a_2=1$

den von Rotta [116] empfohlenen Wert $a_2=0.18$, so liegen die Beträge der Konstanten im Mittel bei 2.8 und stimmen damit gut mit der aus Experimenten folgenden Angabe 2.5 [115, S.126] überein. Eine weitergehende Auswertung der numerischen Ergebnisse zur Berücksichtigung der Inhomogenität der Turbulenz im Modell sollte sich dieser Arbeit anschließen. Weiterhin kann hierbei die oft diskutierte Beziehung [4] zwischen den Druckschwankungen (Abb.50,51) und den Geschwindigkeitsschwankungen untersucht werden. Die Brauchbarkeit des numerischen Verfahrens zu diesem Zweck ist durch obige Auswertungen wohl bewiesen.

11. Schlußfolgerungen

11.1 Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse

Es wird ein numerisches Differenzenverfahren vorgestellt, mit dem der dreidimensionale, instationäre, inkompressible turbulente Impulstransport bei Reynoldszahlen $Re_m > 10^5$ in Platten- und erstmals auch in konzentrischen Ringspaltkanälen durch direkte Integration der Navier-Stokes-Gleichungen simuliert werden kann.

Das Verfahren ist in dem Programm TURBIT-1 realisiert. Hierbei wird die maximal verwendbare Anzahl der Differenzenmaschen wegen einer dynamischen Datenverwaltung in erster Linie nicht durch den verfügbaren Speicherplatz, sondern allein durch die vertretbaren Rechenzeiten begrenzt. Es werden 8 verschiedene Fälle praktisch simuliert, wobei in zwei Fällen der betrachtete Strömungsraum in $64 \times 32 \times 32 = 65536$ Maschen aufgeteilt ist. Dies liegt wesentlich über den früher realisierten Maschenzahlen.

Aufgrund dieser noch immer nicht ausreichenden Maschenzahlen ist ein Feinstrukturmodell erforderlich, mit dem die Reynoldsspannungen, die bei der Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen über jeweils eine Differenzennetz-Masche als unbestimmte Größen erscheinen, näherungsweise berechnet werden können. Es wird gezeigt, daß diese Reynoldsspannungen nicht Volumen-, sondern Flächenmittelwerte der Schwankungsgeschwindigkeitskorrelationen darstellen. In dieser Arbeit wird dabei ein Modell entwickelt, daß sich insbesondere durch folgende Eigenschaften von früheren Vorschlägen [29, 81], deren Mängel diskutiert werden, unterscheidet:

- Es wird unterschieden zwischen einem lokalisotropen und einem inhomogenen Anteil. Der lokalisotrope Anteil verschwindet definitionsgemäß im zeitlichen Mittel. Der inhomogene Anteil erlaubt die Anwendung des Verfahrens auch bei relativ großen Maschen.
- Das Modell berücksichtigt die unterschiedliche Ausdehnung der Differenzenmaschen in den einzelnen Richtungen, sowie die verwendeten Differenzenquotienten. Dies ist die wesentliche Voraussetzung für die Anwendbarkeit des Verfahrens bei krummlinigen Koordinaten, wo die Maschenform zwangsläufig mit dem Ort variiert.
- Die turbulente Zähigkeit wird aus einem Ansatz vom Boussinesq-Typ aus der makroskopischen Geschwindigkeitsdeformation und der kinetischen Energie der Schwankungsbewegung innerhalb einer Masche berechnet, für die eine gesonderte Transportgleichung mitintegriert wird.

- Das Modell für den lokalisotropen Anteil der Feinstruktur wird in weitgehend exakter Weise aus der Voraussetzung lokalisotroper Turbulenz mit Kolmogorov-Spektrum quantitativ berechnet. Die Lösungen der hierbei auftretenden komplizierten Integrale werden durch handliche Näherungen approximiert.

Durch entsprechende Auswertung bekannter, experimenteller Ergebnisse wird gezeigt, daß die Voraussetzungen des lokalisotropen Feinstrukturmodells bei Reynolds-Zahlen $Re > 10^5$ gültig sind, wenn die Maschenkantenlängen weniger als etwa $1/30$ des Abstandes der Wände betragen.

Das Differenzenverfahren gestattet radial nichtäquidistante Maschen. Für die linearisierten Differenzengleichungen werden entsprechend dem Neumann-Kriterium Stabilitätskriterien aufgestellt, wie sie für derart komplexe Formeln bisher nicht existierten. Dabei wird u.a. gezeigt, daß das DuFort-Frankel-Schema zur Approximation der Diffusionsterme bei mehrdimensionalen Strömungen mit kleinen Zähigkeiten und gleichzeitiger Konvektion nachteilig ist. Auf die Genauigkeit des Differenzenverfahrens wird eingegangen. Der Druck wird in sehr effektiver Weise durch Lösung der bestimmenden Poisson-Gleichung mit Hilfe der Schnellen Fourier-Transformation bis auf Rundungsfehler exakt gelöst.

Für Platten- und einen Ringspaltkanal ($R_2/R_1=5$) werden numerische Ergebnisse berichtet. Für beide Probleme werden je vier Fälle dargestellt, die sich in der Anzahl der Differenzenmaschen und Periodenlängen unterscheiden. Die numerischen Ergebnisse stimmen gut mit experimentellen Werten überein. Dies gilt insbesondere für das Geschwindigkeitsprofil und die mittleren Geschwindigkeitschwankungen, wo eine merkliche Verbesserung gegenüber den Ergebnissen von Deardorff [29] festzustellen ist. Die Ergebnisse sind weitgehend unabhängig von den verwendeten Maschenzahlen. Physikalisch sinnvolle Ergebnisse erhält man bereits für $32 \cdot 16 \cdot 16 = 8192$ Maschen. Es wurde zudem gezeigt, daß der zusätzliche Aufwand zur Integration der Feinstrukturenergie-Gleichung nicht notwendig ist. Probleme treten bei der quantitativen Festlegung des Feinstrukturmodells und der Berechnung von Wandschubspannungen auf.

Am Beispiel des Energie-Längen-Modells sowie der Druck-Geschwindigkeitsdeformations-Korrelation wird gezeigt, daß das Verfahren ein brauchbares Werkzeug zur quantitativen Bestimmung von Turbulenzmodellen darstellt. Simulierbar sind insbesondere die Terme, die vorwiegend durch die Grobstruktur der Turbulenz bestimmt sind. Aus den numerischen Lösungen können dabei auch solche Größen berechnet werden, die nicht oder nur schwer meßbar sind.

11.2 Vorschläge zur Anwendung und Weiterentwicklung der dargestellten Methoden

In nächster Zeit sollten zunächst die entwickelten Verfahren angewendet werden, um Turbulenzmodelle zu prüfen, zu vervollständigen oder zu verbessern. Hierbei kann zum Teil einfach auf die bereits vorliegenden räumlichen Geschwindigkeitsfelder ohne weitere Integration zurückgegriffen werden.

Sodann sollte man versuchen, die Mängel des Verfahrens zu beseitigen, auf die hingewiesen wurde; hierzu gehören:

Berücksichtigung des Spektrums bei kleinen Wellenzahlen (Kap.5.2.2.5.2),
Berücksichtigung der Randomität (Kap.5.2.2.5.1
sowie A5.1) und die Umgehung der Voraussetzung der lokalen Isotropie bei großen Maschen.

Ohne wesentliche zusätzliche theoretische Arbeit könnte das Programm erweitert werden für Ringspaltströmungen mit gleichzeitiger Rotation der Wände oder aufgeprägtem Drall, sowie Strömungen in viereckigen Kanälen, wo dann auch Sekundärströmungen untersucht werden könnten. Aufwendiger, aber auch möglich erscheint die Simulation rezirkulierender Strömungen, wie z.B. um Blockaden [75], um Gebäude (Häuser, Kühltürme usw.) [63] und Rippen. Voraussetzung ist hierfür jedoch stets, daß ein begrenzter Strömungsraum mit allseitig definierten Randbedingungen vorliegt (wie z.B. periodische Randbedingungen). Nach wie vor schwierig dürfte die Simulation von Rohrströmungen oder ähnlicher Probleme sein, bei denen die natürlichen Koordinaten singuläre Stellen besitzen.

Weiterhin kann man gleichzeitig mit dem Impuls den turbulenten Transport skalarer Größen wie z.B. Enthalpie simulieren. Der zusätzliche Aufwand ist nicht übermäßig groß, da bereits vier Größen (3 Geschwindigkeitskomponenten, eine Energie) in dem Verfahren enthalten sind; eine zusätzliche Größe bewirkt also nur etwa 25% mehr Aufwand. Hierbei fehlt es bisher an ähnlich genauen Feinstrukturmodellen wie für den Impuls- insbesondere wenn man z.B. kleine Prandtl-Zahlen betrachten will. Es erscheint jedoch denkbar, daß auch hier aus der Theorie isotroper Turbulenz und der Messung entsprechender Spektren [17, 106] ein quantitatives Modell abgeleitet werden kann. Mit großem Aufwand kann man wohl auch mittels der hier verwendeten prinzipiellen Verfahren Probleme des Umweltschutzes und der lokalen Meteorologie untersuchen. Beispielsweise könnte man die Stabilität der Atmosphäre (wie für ähnliche Probleme bereits von Deardorff [33] durchgeführt) bei Anwesenheit großer, örtlich konzentrierter Wärmequellen, wie z.B. Kraftwerksblöcke, untersuchen.

Anhang 1

Aus der Theorie isotroper Turbulenz und über ihre experimentelle Abstützung

In diesem Anhang werden die theoretischen Grundlagen im einzelnen zusammengestellt, die aus der Theorie isotroper Turbulenz benötigt werden, um das Feinstrukturmodell quantitativ bestimmen zu können. Von besonderer Bedeutung ist hierbei die Existenz der Lokalisotropie und des Kolmogorov-Spektrums. Über deren experimentellen Nachweis wird berichtet.

A1.1 Kinematik isotroper Turbulenz

In diesem Kapitel werden eine Reihe von Größen zur Beschreibung isotroper Turbulenz definiert, sowie Beziehungen abgeleitet (entsprechend [53]), die allein aus der Invarianzbedingung der Isotropie, sowie der Kontinuitätsgleichung (1-6) folgen. Diese Beziehungen sind also kinematischer Natur.

A1.1.1 Korrelation $R_{ij}(\underline{r})$

Wir werden für die Bestimmung des Feinstrukturmodells Angaben über Korrelationen von Geschwindigkeiten an zwei Orten benötigen.

Man definiert [53,66] als Zwei-Punkte-Korrelation

$$R_{ij}(\underline{x}, \underline{r}) \equiv \left\langle u_i(\underline{x} - \frac{1}{2}\underline{r}) \cdot u_j(\underline{x} + \frac{1}{2}\underline{r}) \right\rangle. \quad (A1-1)$$

Für isotrope Turbulenz gilt wegen der Invarianz bezüglich Translation

$$R_{ij}(\underline{x}, \underline{r}) \equiv R_{ij}(\underline{r}) \quad (A1-2)$$

Aus der Invarianz bezüglich Rotation folgt [66]:

$$R_{ij}(\underline{r}) = \frac{F(r) - G(r)}{r^2} r_i r_j + G(r) \delta_{ij} \quad (A1-3)$$

Hierbei sind F und G skalare Funktionen des Betrages von \underline{r}

$$r \equiv \sqrt{r_i^2}, \quad (A1-4)$$

die als Längs- und Querkorrelation interpretiert werden können:

$$F(r) = \left\langle u_1(\underline{x} - \frac{1}{2}r\underline{e}_1) \cdot u_1(\underline{x} + \frac{1}{2}r\underline{e}_1) \right\rangle \quad (A1-5)$$

$$G(r) = \left\langle u_2(\underline{x} - \frac{1}{2}r\underline{e}_1) \cdot u_2(\underline{x} + \frac{1}{2}r\underline{e}_1) \right\rangle \quad (A1-6)$$



Wegen der Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \tau_i} R_{ij}(\underline{r}) = 0 \quad (\text{A1-7})$$

woraus folgt [66]:

$$G(\tau) = \frac{1}{2\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} (\tau^2 F(\tau)) \quad (\text{A1-8})$$

A1.1.2 Energiespektrum

Man kann sich eine turbulente Strömung vorstellen als die Überlagerung von trigonometrischen Geschwindigkeitsfunktionen mit dem Ort \underline{x} als Variable und verschiedenen Wellenzahlen \underline{k} [132]:

$$u_i(\underline{x}, t) \sim \int v_i(\underline{k}, t) \exp\{\sqrt{-1} \underline{k} \cdot \underline{x}\} d\underline{k} \quad (\text{A1-9})$$

$\underline{k} = \{k_1, k_2, k_3\}$ ist der Wellenzahlenvektor mit der Dimension [1/Länge].

Es ist nun möglich, den Anteil der Energie des Geschwindigkeitsfeldes in einem gewissen Wellenzahlenintervall zu bestimmen. Die Verteilung der Energie auf verschiedene Wellenzahlbereiche wird Energiespektrum genannt. Es wird unterschieden zwischen einem "eindimensionalen Energiespektrum $E_1(k)$ ", einem "dreidimensionalen tensoriellen Energiespektrum $E_{ij}(\underline{k})$ " und einem "dreidimensionalen, mittleren (skalaren) Energiespektrum $E(k)$ ".

Das tensorielle Energiespektrum $E_{ij}(\underline{k})$ ist definiert als die Fourier-Transformierte der Korrelation $R_{ij}(\underline{r})$ [53].

$$E_{ij}(\underline{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{ij}(\underline{r}) \exp\{-\sqrt{-1} \underline{k} \cdot \underline{r}\} d\underline{r} \quad (\text{A1-10})$$

Das eindimensionale Spektrum $E_1(k_1)$ ist definiert als die (eindimensionale) Fouriertransformierte der Längskorrelation $F(r_1)$ gemäß (A1-5)

$$E_1(k_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(r_1) \exp\{-\sqrt{-1} k_1 r_1\} dr_1 \quad (\text{A1-11})$$

Das dreidimensionale skalare Spektrum $E(k)$ ist schließlich definiert als das Integral von $E_{ii}(\underline{k})$ über alle Wellenzahlen \underline{k} , deren Betrag gleich k ist:

$$E(k) \equiv \int_{|\underline{k}|=k} E_{ii}(\underline{k}) d\underline{k} \quad (\text{A1-12})$$

Während $E_{1j}(\underline{k})$ praktisch lediglich mathematisch beschreibbar ist, kann $E_1(k_1)$ durch Messung der Korrelation $F(r)$ gemessen werden. Uns wird aber hauptsächlich $E(k)$ interessieren, weswegen die folgenden Umrechnungen nützlich sind [53]

$$E_1(k_1) = \int_{k_1}^{\infty} \frac{E(k)}{k} \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) dk \quad (A1-13)$$

$$E(k) = 2\pi k^2 E_{ii}(\underline{k}), \quad |\underline{k}| = k \quad (A1-14)$$

Analog zu (A1-3,8) kann gezeigt werden:

$$E_{33}(k_1 e_1) = E_{22}(k_1 e_1) = \frac{1}{2} \left(E_{11}(k_1 e_1) - k_1 \frac{dE_{11}(k_1 e_1)}{dk_1} \right) \quad (A1-15)$$

A. 1.1.3 Beziehung zwischen den Korrelationen und dem skalaren Energiespektrum $E(k)$

Gemäß Hinze [53] gilt als Folge von (A1-3,5, 10,12):

$$F(r) = 2 \int_0^{\infty} E(k) \left(\frac{\sin(kr)}{k^3 r^3} - \frac{\cos(kr)}{k^2 r^2} \right) dk. \quad (A1-16)$$

Wegen (A1-3) und (A1-8) ist damit $R_{1j}(\underline{r})$ bestimmbar, wenn $E(k)$ bekannt ist. Mittels (A1-11) kann zudem $R_{1j}(\underline{r})$ aus eindimensionalen Messungen bestimmt werden.

Im folgenden werden einige Formeln abgeleitet, die zur direkten Berechnung von $R_{1j}(\underline{r})$ geeignet sind, wenn $E(k)$ bekannt ist und die auch dann anwendbar sind, wenn $E(k)$ schwächer als k^{-2} bei $k=0$ singularär ist.

Wir betrachten zunächst $R_{11}(\underline{r})$; R_{22} und R_{33} ergeben sich analog.

Aus (A1-3) und (A1-8) folgt:

$$R_{11}(r) = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left[(r^2 - r_1^2) F(r) \right] \quad (A1-17)$$

Wird für $F(r)$ Gleichung (A1-16) eingesetzt und zur Vermeidung der Singularität bei k gleich Null $R_{11}(0)$ subtrahiert, so ergibt sich:

$$R_{11}(r) - R_{11}(0) = 2 \int_0^{\infty} E(k) \left\{ A(r \cdot k) - \frac{r^2}{k^2} B(r \cdot k) \right\} dk, \quad (A1-18)$$

mit

$$A(rk) \equiv \frac{\sin(rk)}{rk} - \frac{\sin(rk)}{(rk)^3} + \frac{\cos(rk)}{(rk)^2} - \frac{2}{3} \quad (A1-19)$$

und

$$B(rk) \equiv \frac{\sin(rk)}{rk} - 3 \frac{\sin(rk)}{(rk)^3} + 3 \frac{\cos(rk)}{(rk)^2}.$$

Eine Reihenentwicklung, die im Bereich $0 \leq rk \leq \frac{\pi}{2}$ bis auf einen Fehler von ca. 10^{-7} gültig ist und für die numerische Auswertung* der Integrale für kleine $k \cdot r$ bei beliebigem $E(k)$ hilfreich ist, ergibt:**)

$$\begin{aligned} A(rk) &= -\frac{2}{15} (rk)^2 + \frac{1}{140} (rk)^4 - \frac{1}{5670} (rk)^6 + \frac{1}{399168} (rk)^8 - \dots \\ B(rk) &= -\frac{1}{15} (rk)^2 + \frac{1}{210} (rk)^4 - \frac{1}{7560} (rk)^6 + \frac{1}{498960} (rk)^8 - \dots \end{aligned} \quad (A1-20)$$

Man erkennt, daß der Integrand also auch dann noch nichtsingulär ist, wenn gilt: $E(k) \sim k^{-n}$ mit $n < 2$.

Die übrigen Korrelationen $R_{ij}(r)$ für $i \neq j$ ergeben sich sodann gemäß (A1-3) und A1-8) zu

$$\begin{aligned} R_{ij}(r) &= -\frac{r_i r_j}{2r} \frac{\partial F(r)}{\partial r} \\ &= -\frac{r_i r_j}{2r} \frac{\partial R_{11}(r, e_1)}{\partial r_1}, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (A1-21)$$

aus obigen Formeln.

A1.1.4 Beziehung zwischen Deformationsgeschwindigkeitsquadrat, Dissipation und Energiespektrum bzw. Korrelationen.

Die Dissipation ϵ ist gemäß (1-16) definiert als

$$\epsilon = \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Wegen der für isotrope Turbulenz aus der Definition (A1-1) ableitbaren Beziehungen

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right\rangle = - \frac{\partial^2 R_{ij}(x)}{\partial x_k \partial x_l} \Big|_{x=0} \quad (A1-22)$$

gilt:

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle &= \left\langle \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right\rangle = - \frac{\partial^2 R_{11}(r, e_1)}{\partial r_1^2} \Big|_{r_1=0} \\ \left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 \right\rangle &= \left\langle \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle = \dots \\ \left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right\rangle &= \left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \right\rangle = \dots \end{aligned} \quad (A1-23)$$

*) Für das Kolmogorov-Spektrum ist eine analytische Integration möglich, siehe Kap. 4.3.6

**) Bei der Ermittlung derartiger Reihenentwicklungen erweist sich FORMAC [135] als äußerst hilfreich.

$$\left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right\rangle$$

und also

$$\langle \varepsilon \rangle = 15 \nu \left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle = -15 \nu \left(\frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2} \right)_{r=0} \quad (\text{A1-24})$$

Aus (4-16, 24) folgt zudem:

$$\langle \varepsilon \rangle = 2 \nu \int_0^\infty E(k) k^2 dk \quad (\text{A1-25})$$

und damit für das mittlere Deformationsgeschwindigkeitsquadrat $\langle \frac{1}{2} D_{ij}^2 \rangle = \langle \varepsilon / \nu \rangle$ (A1-26)

$$\langle D_{ij}^2 \rangle = 4 \int_0^\infty E(k) k^2 dk \quad (\text{A1-27})$$

Aus (A1-24) folgt

$$\left. \frac{\partial^2 F(r)}{\partial r^2} \right|_{r=0} = -\frac{2}{15} \int_0^\infty E(k) k^2 dk \quad (\text{A1-28})$$

und verallgemeinert gilt [115, S.99]:

$$\left. \frac{\partial^{2n} F(r)}{\partial r^{2n}} \right|_{r=0} = \frac{2 (-1)^n}{(2n+1)(2n+3)} \int_0^\infty E(k) k^{2n} dk \quad (\text{A1-29})$$

A 1.2 Energiespektren aufgrund von Modellen der Dynamik lokalisotroper Turbulenz

A1.2.1 Übersicht

Wir haben im vorhergehenden Kapitel gesehen, daß viele Größen zur Beschreibung isotroper Turbulenz rein kinematisch bestimmt sind, wenn das skalare Energiespektrum $E(k)$ bekannt ist. Den prinzipiellen Verlauf eines Energiespektrums in isotroper Turbulenz zeigt Abb.6

$E(k)$ ist Null für $k=0$, da in isotroper Turbulenz die mittlere Geschwindigkeit Null ist. $E(k)$ wächst sodann an, um bei Wellenzahlen $k_{max} \sim \frac{1}{L_{max}}$ sein Maximum anzunehmen, wobei L_{max} als der Durchmesser derjenigen Turbulenzballen angesehen werden kann, die den größten Anteil der kinetischen Energie der Schwankungsbewegung tragen. Bei großen Wellenzahlen (gemäß Gl(A1-25)) bewirken die molekularen Zähigkeitskräfte eine Umsetzung der kinetischen Energie in Wärme und $E(k)$ geht daher gegen Null für große k . Bei sehr großen Wellenzahlen ist ein weiteres Maximum denkbar, das die Brownsche Molekularbewegung repräsentiert;

damit die Strömung als Kontinuum betrachtet werden darf (gemäß der Voraussetzungen des Kap.1.3) muß dieses Maximum bei Wellenzahlen liegen, die sehr viel größer sind als die Wellenzahlen, bei denen das Spektrum infolge der molekularen Zähigkeit zu Null wird.

Es wird nun vorausgesetzt, daß mit Hilfe des Differenzenverfahrens der Wellenzahlenbereich im Maschennetz explizit zwischen $k=0$ und $k=k_{\text{Netz}}$ aufgelöst werden kann, wobei zumindest gilt:

$$k_{\text{Netz}} > k_{\text{max}}$$

Der nicht im Maschennetz auflösbare Bereich, also die Feinstruktur, entspricht Wellenzahlen $k \geq k_{\text{Netz}}$. Da wir für diese Feinstruktur Modelle benötigen, soll ein Turbulenzmodell dargestellt werden, daß für $k \geq k_{\text{Netz}}$ das Energiespektrum $E(k)$ quantitativ beschreibbar macht.

Im folgenden Abschnitt werden die von Kolmogorov [67], Weizsäcker [139] und anderen [92, 93, 52] entwickelten Vorstellungen des Energietransportes erläutert, die schließlich aufgrund von Dimensionsanalyse einen Ansatz für $E(k)$ ergeben. Ein Teil der Modellvorstellung läßt sich von den exakten Gleichungen her begründen [103].

A1.2.2 Modell des Energietransportes im Wellenzahlenraum ("Kaskadenprozess")

Für hinreichend große Reynolds'sche Zahlen kann eine turbulente Strömung als Ergebnis einer Überlagerung von Wirbeln ("Turbulenzballen" oder "Spektralelementen") verschiedenster Größe angesehen werden. Nur die größten dieser Wirbel entstehen unmittelbar wegen der Instabilität der mittleren Strömung. Die Bewegung der größten Wirbel ist ihrerseits instabil und erzeugt Wirbel mit kleinerer charakteristischer Länge bzw. größerer charakteristischer Wellenzahl.

Eine Begründung für diese Instabilität haben Taylor-Green [131] gegeben; hiernach wird ein Turbulenzballen mit Durchmesser d_0 und Rotation ω_0 infolge turbulenter Diffusion und (wie ich ergänzen möchte) infolge der Zentrifugalbeschleunigung "aufgebläht". Da aber gilt

$$\omega = \omega_0 \cdot \frac{d}{d_0}$$

wächst dessen Rotation proportional seinem Durchmesser d . Der Ballen kann aber nur solange "aufblähen", bis die Dissipation $\varepsilon \sim v \omega^2$ bewirkt, daß er in kleinere Wirbel zerfällt.

Eine Ausdehnung des Turbulenzballens in radialer Richtung kann bei inkompressiblem Fluid nur erfolgen, wenn parallel zur Rotationsachse Fluid zum Ballen hinströmen kann. Dies ist ein schönes Beispiel dafür, daß gewisse Strömungsvorgänge turbulenter Strömungen nur in drei Dimensionen auftreten können.

Nach sehr vielen derartigen "Kaskadenprozessen" sind die charakteristischen Längen so klein, daß die Zähigkeitskräfte die Trägheitskräfte überwiegen (die mit der Länge gebildete Reynoldszahl wird klein) und die kinetische Energie in Wärme umgesetzt wird. Wesentlich hierbei ist, daß die Zähigkeitskräfte erst bei kleinen Ballen bzw. großen Wellenzahlen wirksam sind. Gemäß Kolmogorov u.a. wird daher postuliert, daß es im Wellenzahlenraum einen Bereich $k_0 < k < k_1$ gibt, in dem allein die Trägheitskräfte wirken. Dieser Bereich wird daher als "Inertial subrange" bzw. "Durch Trägheitskräfte bestimmter Bereich" genannt. In diesem Bereich ist also weder die Zähigkeit ν noch die makroskopische Geometrie, d.h. die Art der Erzeugung der großen Turbulenzballen von Bedeutung.

A1.2.3 Kolmogorov-Pao-Spektrum, Kolmogorov-Länge

Gemäß obiger Modellvorstellung kann das Energiespektrum im inertial subrange allein von der Größe der Ballen bzw. ihrer Wellenzahl k und dem Energietransport von kleinen zu großen Wellenzahlen bestimmt sein, der letztlich von der gesamten Dissipation $\langle \varepsilon \rangle$ bestimmt ist. Allein aus einer Dimensionsanalyse gelangt man dann zu dem Schluß

$$E(k) = \alpha \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} \quad (A1-30)$$

Hierbei ist α die Kolmogorov-Konstante (vergl. Kap. A1.2.4 bezüglich ihres Wertes).

Die untere Grenze k_0 des inertial subrange ist gegeben etwa durch

$$k_0 \approx 1/L_0 \quad (A1-31)$$

wobei L_0 ein integraler Längenmaßstab wie z.B. der Prandtl'sche Mischungsweg ist, der in der Größenordnung von 10^{-2} bis 10^{-1} liegt.

Die obere Grenze

$$k_1 \approx 1/\eta \quad (A1-32)$$

ist durch die "Kolmogorov-Länge" η (vergl. Kap. 1.6.1) charakterisiert, die diejenigen Ballendurchmesser kennzeichnet, bei denen die Zähigkeitskräfte und die Trägheitskräfte, die den Energietransport (proportional $\langle \varepsilon \rangle$) von kleinen zu großen Wellenzahlen hin bewirken, von gleicher Größenordnung sind. Aus einer Dimensionsanalyse ergibt sich hier

$$\eta \sim \left(\frac{\nu^3}{\langle \varepsilon \rangle} \right)^{1/4} \quad (A1-33)$$

Aufgrund der genaueren Modellvorstellung von Pao [103] ergibt sich für das Spektrum

$$E(k) = \alpha \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} \cdot \exp \left\{ -\frac{3}{2} \alpha \left[\left(\frac{\nu^3}{\langle \varepsilon \rangle} \right)^{1/4} \cdot \frac{1}{k} \right] \right\} \quad (A1-34)$$

Man nimmt daher den fehlenden Proportionalitätsfaktor in (4-33) zu Eins an.

Das Kolmogorov-Spektrum (4-30) gilt also in einem Bereich

$$\frac{1}{L_0} < k < \frac{1}{\eta}, \quad (A1-35)$$

wobei man vorsichtigerweise wohl das Zeichen $<$ durch \ll ersetzen sollte.

Vergleiche Kap. 1.6.1 und Abb. 2 bezüglich einer Abschätzung der Größenordnung von η .

A1.2.4 Über den Betrag der Kolmogorov-Konstanten

Tabelle 3 gibt Auskunft über Messungen, theoretische Abschätzungen und Empfehlungen für den Betrag der Kolmogorov-Konstanten α . Man sieht, daß die Meßwerte in vielen unterschiedlichen Strömungen (auch in einer Kanalströmung) zwischen 1.41 und 1.7 streuen. Ein Wert von

$$\alpha = 1.5 \quad (A1-36)$$

erscheint demnach glaubhaft und wird in dieser Arbeit verwendet.

A1.2.5 Über das Spektrum außerhalb des durch Trägheitskräfte bestimmten Bereiches

Für sehr kleine Wellenzahlen findet man theoretische Vorhersagen [53, 115], die ergeben, daß entweder

$$E(k) \sim k^4 \quad 0 \leq k \ll \frac{1}{L_0} \quad (A1-37)$$

oder

$$E(k) \sim k^2 \quad 0 \leq k \ll \frac{1}{L_0} \quad (\text{A1-38})$$

gilt.

Für den Bereich $k > k_0$ ($= \frac{1}{L_0}$) hat Heisenberg folgendes Spektrum angegeben [52]:

$$E(k) = \alpha \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} \left[1 + \frac{27}{8} \alpha^3 \eta^4 k^4 \right]^{-4/3} \quad (\text{A1-39})$$

Für $k \ll \frac{1}{\eta}$ ergibt sich auch hieraus das Kolmogorov-Spektrum. Für $k \gg \frac{1}{\eta}$ ergibt sich eine Proportionalität zu k^{-7} :

$$E(k) = \frac{1}{\alpha^3} \left(\frac{2}{3} \right)^4 \frac{\langle \varepsilon \rangle^2}{\nu^4} k^{-7}, \quad k \gg \frac{1}{\eta} \quad (\text{A1-40})$$

Dies kann jedoch nicht bis zu beliebig großen Wellenzahlen gültig sein, da sonst Integrale der Art

$$\int_0^{\infty} E(k) k^{2n} dk$$

für $n \geq 4$ nicht mehr existieren, im Gegensatz zu den höheren Ableitungen der Längskorrelation $F(r)$ gemäß (A1-24). Aus diesem Grund erscheint das Pao-Spektrum (A1-34) allgemeingültiger.

A1.2.6 Berechnung der Korrelation für Turbulenz mit Kolmogorov-Spektrum

Wird $E(k)$ gemäß (A1-30) in (A1-18) eingesetzt, so ergibt partielle Integration gemäß folgender Hilfsformeln [13]

$$\int \frac{\sin(x)}{x^n} dx = -\frac{1}{n-1} \frac{\sin(x)}{x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{\cos(x)}{x^{n-1}} dx \quad (\text{A1-41})$$

$$\int \frac{\cos(x)}{x^n} dx = -\frac{1}{n-1} \frac{\cos(x)}{x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{\sin(x)}{x^{n-1}} dx \quad (\text{A1-42})$$

unter Beachtung von Reihenentwicklungen für $x=0$ sowie

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^{2/3}} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \quad (\text{A1-43})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \approx 2.678938 \quad (\text{A1-44})$$

schließlich

$$R_{ii}(\tau) - R_{ii}(0) = \frac{18}{55} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \alpha \langle \varepsilon \rangle^{2/3} \tau^{2/3} \left(1 - \frac{\tau^2}{4\tau^{4/3}} \right) \quad (\text{A1-45})$$

(analog R_{22}, R_{33}), sowie mit (A1-21)

$$R_{ij}(\tau) = -\frac{18}{55} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \alpha \langle \varepsilon \rangle^{2/3} \frac{\tau_i \tau_j}{4 \tau^{4/3}}, \quad i \neq j \quad (\text{A1-46})$$

Diese Ergebnisse finden sich beispielsweise auch in [80, 53]; die hier verwendete Ableitung erlaubt jedoch auch die Berechnung der Korrelationen für andere Spektren (auf numerischem) Wege, z.B. für das Pao-Spektrum.

So wie das Kolmogorov-Spektrum nur in einem begrenzten Wellenzahlen-Bereich (A1-35) gilt, gelten diese Korrelationen nur in einem begrenzten Bereich

$$\eta < r < L_0 \quad (A1-47)$$

Dies wird deutlich, wenn man bedenkt, daß im Widerspruch zu (A1-24) aus (A1-45) folgen würde

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right|_{r=0} = -\infty \quad (A1-48)$$

und im Widerspruch zur Erfahrung $R_{11}(r)$ für $r \rightarrow \infty$ selbst gegen $-\infty$ steht. Eine für $0 < r < L_0$ geltende Korrelation, die zudem exakt mit (A1-24) übereinstimmend ist, erhält man bei Verwendung des Pao-Spektrums (A1-34). Die untere Grenze ist jedoch gemäß Abb.2 bei Reynolds-Zahlen $Re \gtrsim 10^6$ unkritisch.

A1.3 Experimentelle Absicherung der Gültigkeit von Lokal isotropie und Kolmogorov-Spektrum

A1.3.1 Lokal isotropie

Für die Existenz lokaler Isotropie in makroskopisch anisotropen turbulenten Strömungen sprechen zahlreiche experimentelle Beweise. Pao[103] zählt hierzu alleine 18 Referenzen auf. Der Grund für die Existenz lokaler Isotropie liegt in der Wirkung des Druckes infolge der Inkompressibilität. Wie Rotta [108,115,S.123] gezeigt hat, bewirken die Druck- Geschwindigkeits-Korrelationen einen Energieaustausch zwischen den Geschwindigkeitsschwankungen der verschiedenen Richtungen, so daß von Komponenten mit starker Schwankungsintensität Energie auf solche mit schwächerer Intensität übertragen wird, bis sich eine isotrope Energieverteilung einstellt. Quantitativ hat Rotta hierfür folgenden Ansatz vorgeschlagen:

$$\left\langle p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle \approx - 2 k_p \frac{\langle u_i u_j \rangle - \frac{1}{3} \langle u_i u_i \rangle \delta_{ij}}{\langle u_i^2 \rangle} \langle \varepsilon \rangle \quad (A1-48)$$

In Anlehnung an Messungen von Uberoi [138] wird

$$k_p \approx 2.5 \quad (A1-49)$$

geschätzt.

Im folgenden seien drei Arbeiten zum Nachweis lokaler Isotropie zitiert.

Townsend [133] hat experimentell in der Nachlaufströmung hinter einem umströmten Zylinder gezeigt, daß das auf zeitliche Mittelwerte bezogene Geschwindigkeits-Schwankungsfeld im Rahmen der Meßgenauigkeit den für Isotropie geltenden Beziehungen (A1-23) genügt.

Laufer [76, 77] zeigt, daß in einer quasi Plattenströmung mit $Re_{max} \approx 6 \cdot 10^4, x_3 = 0.4$ für Wellenzahlen *)

$$k \geq 12.5$$

gilt

$$\frac{E_{13}(k_1)}{E_{11}(k_1)} = 0$$

d.h. der lokale Anteil der Reynoldsspannungen $\langle u_i' u_j' \rangle$ verschwindet für diese Wellenzahlen, wie bei isotroper Turbulenz für alle Wellenzahlen.

Da in einem Maschennetz zur Darstellung von Schwingungen mit einer dimensionslosen Wellenzahl k

$$KM = 2 \times k$$

Maschen benötigt werden, würden hierzu, wie Abb. 7 demonstriert, ca. 25 Maschen benötigt, um innerhalb der Masche Lokalisotropie annehmen zu dürfen.

Ähnliche Aussagen erhält man aufgrund der Messungen von Comte-Bellot [18] bei Reynoldszahlen $114000 \leq Re_m \leq 460000$ in einer Plattenströmung. Die Abb. 8 bis 10 zeigen Spektren $E_{22}(k_1)$ und $E_{33}(k_1)$ sowie die aus $E_{11}(k_1)$ gemäß der für isotrope Turbulenz geltenden Beziehung (A1-15) berechneten Spektren bei $X_3 = 0.5, 0.23, 0.02$ für $Re_m = 240000$. In der Mitte ($X_3 = 0.5$) und etwa auf halbem Abstand zwischen Mitte und Wand ($X_3 = 0.23$) ist schon bei relativ kleinen Wellenzahlen, entsprechend $KM \geq 30$ Maschen, eine ausreichend gute Übereinstimmung der Spektren und folglich Lokalisotropie festzustellen. In unmittelbarer Wandnähe ($X_3 = 0.02$) gilt dies jedoch erst bei $KM \approx 300$. Für andere Reynoldszahlen ergeben sich nur geringfügig andere Aussagen.

*) Laufer hat Geschwindigkeiten als Funktion der Zeit an einem Ort gemessen und daraus Spektren als Funktion der Frequenz \hat{n} ermittelt. Die Umrechnung von Frequenzen in dimensionslose Wellenzahlen erfolgt üblicherweise aufgrund der Taylor'schen Hypothese einer "eingefrorenen Turbulenz" [130] nach der Formel

$$k = \frac{\hat{n} \cdot \hat{D}}{\langle \hat{u}_1 \rangle}$$

$$\text{mit } \hat{D} = 0.127m, \langle \hat{u}_1 \rangle = 15m/s$$

Aufgrund dieser Ergebnisse kann also für $Re_m \gtrsim 10^5$, außer in der Wandmasche, Lokalisotropie innerhalb einer Masche angenommen werden, wenn $KM \gtrsim 30$ ist.

A1.3.2 Kolmogorov-Spektrum

Laufer [76,77] konnte bei seinen Messungen in einer quasi Plattenströmung bei $Re_{max} \approx 60000$ ein Kolmogorov-Spektrum nicht feststellen. Das gemessene Spektrum entsprach mehr dem k^{-7} -Verlauf gemäß Heisenberg (A1-40); Laufer weist jedoch auf einige Unsicherheiten in seinen Messungen hin. Dennoch scheint es denkbar, daß bei derartig kleinen Reynoldsschen Zahlen die Grenzen k_0 und k_1 (A4-31,32) zusammenfallen.

Dagegen wurde von Comte-Bellot [18] bei ähnlicher Geometrie und $114000 \leq Re_m \leq 460000$ ein dem Kolmogorov-Spektrum entsprechendes Spektrum gut nachgewiesen, wie z.B. Abb.11 für $X_3 \approx 0.22$ zeigt. Hiernach liegen die Grenzwellenzahlen für $Re_m \approx 240000$ so, daß bei Maschenzahlen

$$15 \leq KM \leq 325$$

für die Feinstruktur die Existenz des Kolmogorov-Spektrums angenommen werden darf. Die Grenzen nehmen schwach mit der Reynolds-Zahl zu. Die obere Grenze entspricht der Abschätzung gemäß Abb.2 Auch in Wandnähe ($X_3 = 0.06$) existiert bei Wellenzahlen entsprechend $KM \gtrsim 20$ noch eine $k^{-5/3}$ -Abhängigkeit des Spektrums.

Man kann daher annehmen, daß für $Re_m \gtrsim 10^5$ und Maschenzahlen $KM \gtrsim 20$ (in einer Richtung) ein Spektrum entsprechend Kolmogorov (A1-30) für die Feinstruktur angenommen werden darf.

A n h a n g 2 : Berechnung von Korrelationen zwischen räumlichen Mittelwerten

In diesem Anhang werden die Grundlagen zur quantitativen Bestimmung des Feinstrukturmodells bereitgestellt. Hierbei werden unter Voraussetzung isotroper Turbulenz mit Kolmogorov-Spektrum zeitliche Mittelwerte von Produkten aus je zwei über Volumina gemittelten Geschwindigkeiten oder Geschwindigkeitsableitungen quantitativ bestimmt.

A2.1 Berechnung der auftretenden Volumenkorrelationen

Im folgenden werden für die in dieser Arbeit bei kartesischen Koordinaten verwendeten Mittelungsvolumina die gemäß (4-20) definierten Volumenkorrelationen $\varphi_{12}(\underline{z})$ berechnet. Uberoi-Kavaszny [136] haben entsprechende Ergebnisse für Linien-, Kreisflächen- und Kugelvolumina mit $V_1=V_2=V$ graphisch angegeben. Hier werden rechteckige Volumina betrachtet und dafür die Volumenkorrelationen algebraisch bestimmt.

A2.1.1 n-dimensionale rechteckige Volumina $V_1=V_2=V$

Das betrachtete Mittelungsvolumen V sei definiert durch

$$|z_i| \leq H_i/2; i=1,2,\dots,n \quad (A2-1)$$

Die Gewichtsfunktionen $K(\underline{z})$ sind also gegeben durch

$$K(\underline{z}) = \prod_{i=1}^n K_i(z_i) \quad (A2-2)$$

mit

$$K_i(z_i) = \begin{cases} 1/H_i & \text{für } |z_i| \leq H_i/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (A2-3)$$

Hieraus läßt sich $\varphi_{12}(\underline{z})$ berechnen:

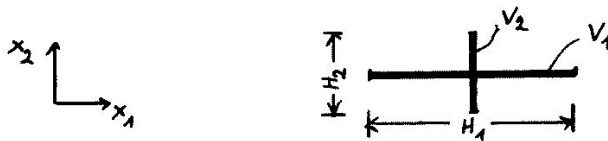
$$\begin{aligned} \varphi_{12}(\underline{z}) &= \iiint_{\infty} \prod_{i=1}^n K_{[i]}(\tau_i + z_i) K_{[i]}(z_i) dV(\underline{z}) \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{\infty} K_{[i]}(\tau_i + z_i) K_{[i]}(z_i) dz_i \end{aligned} \quad (A2-4)$$

Die einzelnen Integrale entsprechen Faltungsintegralen über Rechtecksverteilungen; diese ergeben Dreiecksverteilungen [9], gemäß:

$$\varphi_{12}(\underline{z}) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{H_{[i]}^2} \text{Max}(0, H_i - |\tau_i|) \quad (A2-5)$$

A2.1.2 V_1, V_2 rechteckige Flächen-"Volumina" mit unterschiedlichen Orientierungen

Neben deckungsgleichen Volumina V_1 und V_2 werden in dieser Arbeit auch die Volumenkorrelationen zwischen zwei Rechteckflächen mit verschiedenen orthogonalen Richtungen der Flächennormalen benötigt. Folgende Skizze zeigt eine grundsätzliche Möglichkeit; alle anderen Fälle ergeben sich durch Rotation des Koordinatensystems.



Die Flächenmittelpunkte fallen zusammen. Die Volumina sind definiert durch

$$V_1 : \quad |s_1| \leq H_1/2 ; \quad s_2 = 0 ; \quad |s_3| \leq H_3/2 \quad (\text{A2-6})$$

$$V_2 : \quad s_1 = 0 ; \quad |s_2| \leq H_2/2 ; \quad |s_3| \leq H_3/2$$

Die entsprechenden Gewichtsfunktionen $K_j(\underline{s}), j=1,2$ sind:

$$K_j(\underline{s}) = \prod_{i=1}^3 K_{ji}(s_i) \quad ; \quad j=1,2 \quad (\text{A2-7})$$

mit

$$K_{13}(s_3) = K_{23}(s_3) = \begin{cases} 1/H_3 & \text{für } |s_3| \leq H_3/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$K_{11}(s_1) = \begin{cases} 1/H_1 & \text{für } |s_1| \leq H_1/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$K_{12}(s_2) = \delta(0, s_2)$$

$$K_{21}(s_1) = \delta(0, s_1)$$

$$K_{22}(s_2) = \begin{cases} 1/H_2 & \text{für } |s_2| \leq H_2/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

δ sei die Dirac-Funktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y) dy = 1 ; \quad \delta(x, y) = 0 \quad x \neq y$$

Beide Gewichtsfunktionen erfüllen die Normierungsbedingung (4-14). Die Volumenkorrelation ist hierfür definitionsgemäß

$$\begin{aligned} \varphi_{12}(\underline{z}) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^3 K_{1i}(z_i + y_i) K_{2i}(y_i) dy_i \\ &= \prod_{i=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} K_{1i}(z_i + y_i) K_{2i}(y_i) dy_i \end{aligned}$$

Hierbei sind also bezüglich y_1 und y_2 Faltungsintegrale zwischen Rechteckfunktionen und Diracfunktionen zu ermitteln; beide ergeben wiederum Rechteckfunktionen. Bezüglich y_3 ergibt sich wie in 5.2.3.1 eine Dreieckfunktion:

$$\varphi_{12}(\underline{z}) = \begin{cases} \frac{1}{H_1 \cdot H_2 \cdot H_3} \max(0, H_3 - |\tau_3|) & \text{für } (|\tau_1| \leq H_1/2) \& (|\tau_2| \leq H_2/2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A2-8})$$

A2.2 Berechnung der gemittelten Energien

Die gemäß (4-24) zu berechnenden Korrelationen ergeben sich zu

$$\langle \overline{V_n E'} \rangle = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} R(u_i - \langle u_i \rangle, u_i - \langle u_i \rangle, V_n, V_n, \underline{0}) \quad (\text{A2-9})$$

wobei V_n definiert ist durch

$$|x_i| \leq \frac{\Delta x_i}{2}, \quad i=1,2,\dots,n \quad (\text{A2-10})$$

Aus (4-21, A2-5) folgt:

$$\langle \overline{V_n E'} \rangle = \int_{-\Delta x_1}^{\Delta x_1} \dots \int_{-\Delta x_n}^{\Delta x_n} \left(\prod_{j=1}^n \frac{\Delta x_j - |\tau_j|}{\Delta x_j^2} \right) \cdot \frac{1}{2} [R_{ii}(\underline{z}) - R_{ii}(\underline{0})] d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (\text{A2-11})$$

Wegen (4-5) und (4-38) gilt:

$$\frac{1}{2} (R_{ii}(\underline{z}) - R_{ii}(\underline{0})) = f_n \langle \varepsilon \rangle^{2/3} |\underline{z}|^{2/3} \quad (\text{A2-12})$$

Normiert man alle Längen mit $h = \sqrt[n]{V_n}$, so folgt

$$\langle \overline{V_n E'} \rangle = f_n \langle \varepsilon \rangle^{2/3} h^{2/3} E_n(\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \dots, \Delta x_n/h) \quad (\text{A2-13})$$

mit

$$E_n(h_1, h_2, \dots, h_n) = 2^n \int_0^{h_1} \dots \int_0^{h_n} \left(\prod_{j=1}^n \frac{h_j - \tau_j}{h_j} \right) (\tau^2)^{1/3} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \quad (\text{A2-14})$$

Dies Integral läßt sich für $n=1$ analytisch bestimmen:

$$E_1(h_1) = E_1(1) = \frac{9}{20} = 0.45 \quad (\text{A2-15})$$

Für gleichseitige Volumina $\Delta x_j = h$ ergibt sich numerisch:

$$E_2(1,1) = 0.6293 \quad (\text{A2-16})$$

$$E_3(1,1,1) = 0.7461 \quad (\text{A2-17})$$

Da stets $\prod_{i=1}^n \frac{\Delta x_i}{h} = 1$ gelten muß, nähert sich der Volumenbereich V_n für $\Delta x_1 \rightarrow \infty$ einem Linienbereich und es gilt daher

$$\lim_{\Delta x_1 \rightarrow \infty} E_n(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n) = 0.45 \cdot \Delta x_1^{2/3} \quad (\text{A2-18})$$

Die numerische Lösung der Integrale für verschiedene Kantenlängen Δx_i und für $n = 0,1,2,3$ lassen sich mit einem maximalen Fehler von 1% approximieren durch

$$E_n(h_1, h_2, \dots, h_n) = 0.45 \left(\sum_{i=1}^n h_i^{1/\beta} \right)^{\beta \cdot 2/3} \quad (\text{A2-19})$$

mit dem durch least square fit gefundenen Wert

$$\beta = 0.69687,$$

wobei diese Approximationsfunktion exakt die Grenzwertbedingung (A2-18) erfüllt.

A2.3 Isotropieeigenschaften der Deformationsgeschwindigkeitsquadrate

Die gemäß (4-23) bis (4-26) zu berechnenden zeitlich gemittelten Quadrate von unterschiedlichen räumlichen Mittelwerten der Deformationsgeschwindigkeiten bestehen aus Summen von 9 durch i, j gekennzeichneten Summanden:

$${}_k D^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 {}_k D^2_{i,j} \quad (\text{A2-20})$$

Es genügt, das Verfahren zur Bestimmung von ${}_k D^2_{11}(\underline{M})$, ${}_k D^2_{12}(\underline{M})$ abzuleiten, wobei \underline{M} das Maschennetz kennzeichnet:

$$\underline{M} \equiv \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 \} \quad (\text{A2-21})$$

Die übrigen Summanden lassen sich dann nach den selben Methoden berechnen, wenn anstelle von \underline{M} ein geeignet gedrehtes Maschennetz verwendet wird, wie es folgende Formeln vorschreiben

$${}_k D^2_{i,j,i,j}(\underline{M}) = {}_k D^2_{11}(\underline{1V} \cdot \underline{M}) \quad (\text{A2-22})$$

$${}_k D^2_{i,j}(\underline{M}) = {}_k D^2_{12}(\underline{2V} \cdot \underline{M}) \quad i \neq j$$

$\underline{1V}$, $\underline{2V}$ beschreiben die erforderliche Rotation:

$$\underline{1V} = \begin{pmatrix} d_{i1} & d_{i2} & d_{i3} \\ d_{i2} & d_{i3} & d_{i1} \\ d_{i3} & d_{i1} & d_{i2} \end{pmatrix}; \quad \underline{2V} = \begin{pmatrix} d_{i1} & d_{i2} & d_{i3} \\ d_{j1} & d_{j2} & d_{j3} \\ (1-d_{i1}-d_{j1}) & (1-d_{i2}-d_{j2}) & (1-d_{i3}-d_{j3}) \end{pmatrix} \quad (\text{A2-23})$$

Diese Beziehungen folgen aus geometrischen Betrachtungen. Im folgenden werden daher zunächst nur noch ${}_k D^2_{11}$, ${}_k D^2_{12}$ betrachtet.

A2.4 Reduzierung der Deformationsgeschwindigkeitsquadrate auf Differenzen von "räumlichen Korrelationen".

Die folgenden Überlegungen werden für ${}_1 D^2_{11}$, ${}_1 D^2_{12}$ im Detail dargestellt. Die Ergebnisse ergeben sich für die restlichen Größen analog.

A2.4.1 D_{11}^2

D_{11}^2 lautet definitionsgemäß (4-23):

$$D_{11}^2 = 2 \langle (\delta_{x_1} \bar{u}_1)^2 \rangle$$

Hierfür folgt bei Beachtung der Definition des Differenzenoperators δ_{x_1} :

$$\begin{aligned} D_{11}^2 &= \frac{2}{\Delta x_1^2} \langle [\bar{u}_1(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) - \bar{u}_1(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3)]^2 \rangle \\ &= \frac{2}{\Delta x_1^2} \left\{ \langle [\bar{u}_1(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3)]^2 \rangle + \langle [\bar{u}_1(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3)]^2 \rangle \right. \\ &\quad \left. - 2 \langle \bar{u}_1(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) \cdot \bar{u}_1(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) \rangle \right\} \end{aligned}$$

Da die einzelnen Terme nicht von den aktuellen Werten x_1, x_2, x_3 sondern lediglich vom Differenzvektor abhängen, gilt:

$$D_{11}^2 = \frac{4}{\Delta x_1^2} \left\{ \langle \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1(0) \rangle - \langle \bar{u}_1 \bar{u}_1(\Delta x_1, 0, 0) \rangle \right\} \quad (A2-24)$$

A2.4.2 D_{12}^2

Ausgehend von den Definitionen ergibt sich für D_{12}^2 :

$$\begin{aligned} D_{12}^2 &= \langle \delta_{x_2} \bar{u}_1 (\delta_{x_2} \bar{u}_1 + \delta_{x_1} \bar{u}_2) \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{\Delta x_2^2} \left(\bar{u}_1(x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3) - \bar{u}_1(x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3) \right)^2 \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \frac{1}{\Delta x_2 \Delta x_1} \left[\bar{u}_1(x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3) - \bar{u}_1(x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3) \right] \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[\bar{u}_2(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) - \bar{u}_2(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) \right] \right\rangle \end{aligned}$$

Nach Auswertung des Quadrates bzw. des Produktes können hier wieder einige Terme zusammengefaßt werden, da die zeitlichen Mittelwerte nicht von \underline{x} abhängen. Beachtet man zudem die aus (4-6) folgenden Symmetriebedingungen

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}_1(0, \frac{\Delta x_1}{2}, 0) \bar{u}_2(\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0) \rangle &= \langle \bar{u}_1(0, -\frac{\Delta x_1}{2}, 0) \bar{u}_2(-\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0) \rangle \\ \langle \bar{u}_1(0, \frac{\Delta x_2}{2}, 0) \bar{u}_2(\frac{\Delta x_2}{2}, 0, 0) \rangle &= -\langle \bar{u}_1(0, -\frac{\Delta x_2}{2}, 0) \bar{u}_2(\frac{\Delta x_2}{2}, 0, 0) \rangle, \end{aligned}$$

so folgt:

$$\begin{aligned} D_{12}^2 &= \frac{2}{\Delta x_2^2} \left\{ \langle \bar{u}_1 \bar{u}_1(0) \rangle - \langle \bar{u}_1 \bar{u}_1(0, \Delta x_2, 0) \rangle \right\} \\ &\quad + \frac{4}{\Delta x_2 \Delta x_1} \langle \bar{u}_1 \bar{u}_2(\frac{\Delta x_1}{2}, \frac{\Delta x_2}{2}, 0) \rangle \end{aligned} \quad (A2-25)$$

A2.4.3 Analoge Ergebnisse

$${}_2D_{11}^2 = \frac{4}{\Delta x_1^2} \left(\langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 \left(\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0 \right) \rangle - \langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 \left(\frac{3}{2} \Delta x_1, 0, 0 \right) \rangle \right) \quad (A2-26)$$

$${}_2D_{12}^2 = \frac{1}{\Delta x_2^2} \left\{ \langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 \left(0, \frac{\Delta x_2}{2}, 0 \right) \rangle - \langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 \left(0, \frac{3}{2} \Delta x_2, 0 \right) \rangle \right\} \\ + \frac{2}{\Delta x_1 \Delta x_2} \langle \hat{u}_1 \hat{u}_2 \left(\frac{\Delta x_1}{2}, \Delta x_2, 0 \right) \rangle \quad (A2-27)$$

$${}_3D_{11}^2 = {}_1D_{11}^2 \quad (A2-28)$$

$${}_3D_{12}^2 = \frac{1}{\Delta x_2^2} \left\{ \langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 (0) \rangle - \langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 (0, \Delta x_2, 0) \rangle \right\} \\ + \frac{1}{\Delta x_1^2} \left\{ \langle \hat{u}_2 \hat{u}_2 (0) \rangle - \langle \hat{u}_2 \hat{u}_2 (\Delta x_1, 0, 0) \rangle \right\} \\ + \frac{4}{\Delta x_1 \Delta x_2} \langle \hat{u}_2 \hat{u}_1 \left(\frac{\Delta x_1}{2}, \frac{\Delta x_2}{2}, 0 \right) \rangle \quad (A2-29)$$

$${}_4D_{11}^2 = \frac{1}{8 \Delta x_1^2} \left\{ 14 \langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 (0) \rangle - 17 \langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 (\Delta x_1, 0, 0) \rangle \right. \\ \left. + 2 \langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 (2 \Delta x_1, 0, 0) \rangle + \langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 (3 \Delta x_1, 0, 0) \rangle \right\} \quad (A2-30)$$

$${}_4D_{12}^2 = \frac{1}{8 \Delta x_2^2} \left\{ 7 \langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 (0) \rangle - 8 \langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 (0, \Delta x_2, 0) \rangle \right. \\ \left. + \langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 (0, 2 \Delta x_2, 0) \rangle + \langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 (\Delta x_1, 2 \Delta x_2, 0) \rangle - \langle \hat{u}_1 \hat{u}_1 (\Delta x_1, 0, 0) \rangle \right\} \\ + \frac{1}{8 \Delta x_1^2} \left\{ 7 \langle \hat{u}_2 \hat{u}_2 (0) \rangle - 8 \langle \hat{u}_2 \hat{u}_2 (\Delta x_1, 0, 0) \rangle \right. \\ \left. + \langle \hat{u}_2 \hat{u}_2 (2 \Delta x_1, 0, 0) \rangle + \langle \hat{u}_2 \hat{u}_2 (2 \Delta x_1, \Delta x_2, 0) \rangle - \langle \hat{u}_2 \hat{u}_2 (0, \Delta x_2, 0) \rangle \right\} \\ + \frac{1}{4 \Delta x_1 \Delta x_2} \left\{ 15 \langle \hat{u}_2 \hat{u}_1 \left(\frac{\Delta x_1}{2}, \frac{\Delta x_2}{2}, 0 \right) \rangle - \langle \hat{u}_2 \hat{u}_1 \left(\frac{3}{2} \Delta x_1, \frac{\Delta x_2}{2}, 0 \right) \rangle \right. \\ \left. - \langle \hat{u}_2 \hat{u}_1 \left(\frac{\Delta x_1}{2}, \frac{3}{2} \Delta x_2, 0 \right) \rangle - \langle \hat{u}_2 \hat{u}_1 \left(\frac{3}{2} \Delta x_1, \frac{3}{2} \Delta x_2, 0 \right) \rangle \right\} \quad (A2-31)$$

A2.4.4 Definitionen

Wir erkennen: die zeitlich gemittelten Deformationsgeschwindigkeitsquadrate gemäß (4-23) bis (4-26) lassen sich berechnen, falls die "räumlichen Korrelationen"

$$\langle \bar{u}_i^m \bar{u}_j^m (\underline{f}_1, \underline{f}_2, 0) \rangle \quad \text{bekannt sind; speziell}$$

benötigt werden:

$$\begin{aligned} d_1(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \underline{f}_1, \underline{f}_2) &\equiv \langle \bar{u}_1 \bar{u}_1 (\underline{f}_1, \underline{f}_2, 0) \rangle \\ d_2(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \underline{f}_1, \underline{f}_2) &\equiv \langle \bar{u}_1 \bar{u}_1 (\underline{f}_1, \underline{f}_2, 0) \rangle \\ d_3(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \underline{f}_1, \underline{f}_2) &\equiv \langle \bar{u}_1 \bar{u}_1 (\underline{f}_1, \underline{f}_2, 0) \rangle \\ d_4(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \underline{f}_1, \underline{f}_2) &\equiv \langle \bar{u}_1 \bar{u}_2 (\underline{f}_1, \underline{f}_2, 0) \rangle \\ d_5(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \underline{f}_1, \underline{f}_2) &\equiv \langle \bar{u}_1 \bar{u}_2 (\underline{f}_1, \underline{f}_2, 0) \rangle \end{aligned} \quad (\text{A2-32})$$

Die weiterhin benötigte Korrelation $\langle \bar{u}_2 \bar{u}_2 (\underline{f}) \rangle$ läßt sich aus d_1 entsprechend den Betrachtungen in Kap.A2.3 berechnen gemäß:

$$\langle \bar{u}_2 \bar{u}_2 (\underline{f}_1, \underline{f}_2, 0) \rangle = d_1(\Delta x_2, \Delta x_1, \Delta x_3, \underline{f}_2, \underline{f}_1) \quad (\text{A2-33})$$

Ebenso kann $\langle \bar{u}_1 \bar{u}_2 (\underline{f}_1, \underline{f}_2, 0) \rangle$ gemäß

$$\langle \bar{u}_1 \bar{u}_2 (\underline{f}_1, \underline{f}_2, 0) \rangle = \langle \bar{u}_1 \bar{u}_2 (\underline{f}_1, \underline{f}_2, 0) \rangle = d_4(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \underline{f}_1, \underline{f}_2) \quad (\text{A2-34})$$

berechnet werden, da die vertauschten Mittelungsoperationen zu gleichen Volumenkorrelationen gemäß (4-20) führen.

Die oben definierten Korrelationen d_k , $k=1,2,\dots,5$ werden im folgenden Abschnitt berechnet.

A2.5 Berechnung der in A2.4.4 definierten Korrelationen

Die Berechnung der Korrelationen $d_k(\underline{f}_1, \underline{f}_2)$, $k=1,2,\dots,5$ gemäß Kap.A2.4.4 erfolgt unter Verwendung der in Kap.4.2 und A2.1.2 bereitgestellten Methoden mit $R_{11}(\underline{r})$ und $R_{12}(\underline{r})$ gemäß (4-5) und (4-6) und f_2 gemäß (4-39).

A2.5.1 Lösung in Integralform

Als Abkürzungen werden definiert

$$\begin{aligned} h &\equiv \sqrt[3]{\Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta x_3} \\ h_i &\equiv \Delta x_i / h & ; \quad i=1,2,3 \\ z_i &\equiv \xi_i / h & ; \quad i=1,2,3 \end{aligned} \quad (\text{A2-35})$$

Damit lassen sich die Ergebnisse in Integralform angeben:

$$d_R(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \xi_1, \xi_2) = R_{11}(0) - f_2 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} h^{2/3} \cdot d_R^*(h_1, h_2, h_3, z_1, z_2); \quad (\text{A2-36})$$

$$k = 1, 2, 3.$$

$$d_1^* = 2 \int_{-h_2}^{h_2} \int_0^{h_3} \frac{(h_2 - |\tau_2|)(h_3 - \tau_3)}{h_2^2 h_3^2} (\tau^2)^{1/3} \left(1 - \frac{z_1^2}{4 + \tau^2}\right) d\tau_3 d\tau_2 \quad (\text{A2-37})$$

$$\tau^2 = z_1^2 + (\tau_2 + z_2)^2 + \tau_3^2 ;$$

$$d_2^* = 2 \int_{-h_1}^{h_1} \int_0^{h_3} \frac{(h_1 - |\tau_1|)(h_3 - \tau_3)}{h_1^2 h_3^2} (\tau^2)^{1/3} \left(1 - \frac{(z_1 + \tau_1)^2}{4 + \tau^2}\right) d\tau_3 d\tau_1 \quad (\text{A2-38})$$

$$\tau^2 = (\tau_1 + z_1)^2 + (\tau_2 + z_2)^2 + \tau_3^2 ;$$

$$d_3^* = 2 \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \int_0^{h_3} \frac{(h_3 - \tau_3)}{h_3} (\tau^2)^{1/3} \left(1 - \frac{(z_1 + \tau_1)^2}{4 + \tau^2}\right) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \quad (\text{A2-39})$$

$$\tau^2 = (\tau_1 + z_1)^2 + (\tau_2 + z_2)^2 + \tau_3^2 ;$$

$$d_R(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \xi_1, \xi_2) = f_2 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} h^{2/3} d_R^*(h_1, h_2, h_3, z_1, z_2); \quad (\text{A2-40})$$

$$k = 4, 5.$$

$$d_5^* = -\frac{1}{2} \int_{-h_1}^{h_1} \int_0^{h_3} \frac{(h_1 - |\tau_1|)(h_2 - |\tau_2|)}{h_1^2 h_3^2} \cdot \frac{(\tau_1 + z_1) z_2}{[(\tau_1 + z_1)^2 + z_2^2 + \tau_3^2]^{2/3}} d\tau_3 d\tau_1 \quad (\text{A2-41})$$

$$d_4^* = -\frac{1}{2} \int_{-\frac{h_1}{2}}^{\frac{h_1}{2}} \int_{-\frac{h_2}{2}}^{\frac{h_2}{2}} \int_0^{h_3} \frac{h_3 - \tau_3}{h_3} \frac{(\tau_1 + z_1)(\tau_2 + z_2)}{[(\tau_1 + z_1)^2 + (\tau_2 + z_2)^2 + \tau_3^2]^{2/3}} d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1 \quad (\text{A2-42})$$

Tabelle 4 zeigt FORTRAN-Unterprogramme mit denen diese Integrale numerisch berechnet werden können. Zur Integration wird das Unterprogramm QSF [65] verwendet, das äquidistant tabulierte Funktionen nach der Simpson-Regel integriert. Die im COMMON-Bereich NNNNNN anzugebende Zahl NN der Stützwerte einer Integrationsvariablen muß zur Erreichung einer Genauigkeit von 10^{-3} etwa 50 betragen. Der COMMON-Bereich CWORK enthält den zur Integration benötigten Arbeitsbereich; er ist für $NN < 100$ ausgelegt.

A2.5.2 Grenzwerte der Integrale und Näherungen

Die numerische Auswertung der oben angegebenen Integrale benötigt viel Rechenzeit. Es ist daher wünschenswert, Näherungen parat zu haben, die diese exakten Lösungen möglichst gut approximieren. Von den Näherungen sei insbesondere gefordert, daß sie die gleichen Ergebnisse für ausgezeichnete Werte der Parameter haben. Hierzu sollen die folgenden Grenzwerte zählen:

$$\lim_{h_2 \rightarrow \infty} \alpha_1^*(h_1, h_2, h_3, 0, 0) = \frac{9}{20} h_2^{2/3}$$

$$\lim_{h_3 \rightarrow \infty} \alpha_1^*(h_1, h_2, h_3, 0, 0) = \frac{9}{20} h_3^{2/3}$$

$$\lim_{\substack{z_1 \rightarrow \infty \\ z_2 \rightarrow \infty}} \alpha_1^*(h_1, h_2, h_3, z_1, z_2) = (z_1^2 + z_2^2)^{1/3} \left(1 - \frac{z_1^2}{4(z_1^2 + z_2^2)} \right)$$

$$\lim_{h_1 \rightarrow \infty} \alpha_2^*(h_1, h_2, h_3, 0, 0) = \frac{27}{80} h_1^{2/3}$$

$$\lim_{h_3 \rightarrow \infty} \alpha_2^*(h_1, h_2, h_3, 0, 0) = \frac{9}{20} h_3^{2/3}$$

$$\lim_{\substack{z_1 \rightarrow \infty \\ z_2 \rightarrow \infty}} \alpha_2^*(h_1, h_2, h_3, z_1, z_2) = (z_1^2 + z_2^2)^{1/3} \left(1 - \frac{z_1^2}{4(z_1^2 + z_2^2)} \right)$$

$$\lim_{h_1 \rightarrow \infty} \alpha_3^*(h_1, h_2, h_3, 0, 0) = \frac{9}{10} \left(\frac{1}{2} \right)^{5/3} h_1^{2/3}$$

$$\lim_{h_2 \rightarrow \infty} \alpha_3^*(h_1, h_2, h_3, 0, 0) = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^{5/3} h_2^{2/3}$$

$$\lim_{h_3 \rightarrow \infty} \alpha_3^*(h_1, h_2, h_3, 0, 0) = \frac{9}{20} h_3^{2/3}$$

$$\lim_{z_1, z_2 \rightarrow \infty} d3^*(h_1, h_2, h_3, z_1, z_2) = (z_1^2 + z_2^2)^{1/3} \left(1 - \frac{z_1^2}{4(z_1^2 + z_2^2)} \right)$$

$$d4^*(h_1, h_2, h_3, 0, z_2) = d4^*(h_1, h_2, h_3, z_1, 0) = 0$$

$$\lim_{h_3 \rightarrow \infty} d4^*(h_1, h_2, h_3, z_1, z_2) = 0$$

$$d5^*(h_1, h_2, h_3, 0, z_2) = d5^*(h_1, h_2, h_3, z_1, 0) = 0$$

$$\lim_{h_3 \rightarrow \infty} d5^*(h_1, h_2, h_3, z_1, z_2) = 0$$

Weiterhin wird gefordert, daß die Näherungen für d_k , $k=1,2,3$ bei $(h_1, h_2, h_3, z_1, z_2) = (1,1,1,0,0)$ exakt mit den numerisch erhaltenen Integrallösungen übereinstimmen sollen. Diese Bezugswerte lauten:

k	$d_k^* (1,1,1,0,0)$
1	0.6293
2	0.5506
3	0.6104

Da $d4^*$ am häufigsten für $z_1 = \frac{\Delta x_1}{2}$, $z_2 = \frac{\Delta x_2}{2}$ und $d5^*$ allein für $z_1 = \frac{\Delta x_1}{2}$, $z_2 = \Delta x_2$ benötigt werden, wird für die Näherung hier die Übereinstimmung mit folgenden numerisch gewonnenen Ergebnissen gefordert:

$$d4^*(1,1,1,1/2,1/2) = -0.1376 \quad d5^*(1,1,1,1/2,1) = -0.0846$$

Näherungen, die diesen Forderungen entsprechen, sind als FORTRAN-Unterprogramme in Tabelle 5 wiedergegeben. Tabelle 6 enthält eine Gegenüberstellung der Ergebnisse aus direkter Integration und der aus diesen Näherungsfunktionen. Die Fehler der Näherungen sind nicht sonderlich klein, jedoch wohl tolerierbar, da die mit diesen Näherungen berechneten Konstanten des Feinstrukturmodells maximal um ca. 20% von den mit den exakten Lösungen berechneten abweichen.

A2.6 Ergebnisse für ${}_k D^2$ und FED

Unter Verwendung der in Kap.A2.3 bis A2.5 abgeleiteten Beziehungen können die Größen ${}_k D^2$ und FED berechnet werden. Zur Darstellung der Ergebnisse eignet sich am besten die Programmform. Unter Bezug auf die in Tabelle 7 angegebenen Unterprogramme D11, D12, D13, D14 und FED1 lauten die Ergebnisse nach Extraktion der dimensionsbehafteten Größen

$${}_k D^2 = f_2 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} h^{-4/3} D1A\left(\frac{\Delta x_1}{h}, \frac{\Delta x_2}{h}, \frac{\Delta x_3}{h}\right), \quad k=1,2,3,4 \quad (A2-43)$$

$$FED = f_3 \langle \varepsilon \rangle FED1\left(\frac{\Delta x_1}{h}, \frac{\Delta x_2}{h}, \frac{\Delta x_3}{h}\right). \quad (A2-44)$$

Mit f_2, f_3 gemäß (4-39,40). Bezüglich zahlenmäßiger Ergebnisse vergleiche Kap.4.3.

Anhang 3: Bestimmung der Konstanten c_1

Hier wird über die von Smagorinsky und Lilly berechneten Werte der in dem Ansatz

$$\overline{u_i' u_j'} = (c_1 h)^2 \left[\frac{1}{2} (\overline{D_{ij}})^2 \right]^{1/2} \overline{D_{ij}} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u_i' u_i'} \quad (\text{A3-1})$$

auf tretenden Konstanten c_1 berichtet und die dabei verwendeten Voraussetzungen und Näherungen aufgezeigt. Zudem werden die Erfahrungen von Deardorff hierzu zusammengefaßt und seine Methode zur Berechnung der kinetischen Energie diskutiert. Den Abschluß dieses Anhangs bildet eine Berechnung der Konstanten c_1 nach den in dieser Arbeit bereitgestellten Methoden.

A3.1 Berechnung von c_1 nach Smagorinsky

Smagorinsky [118] verwendet einen (A3-1) entsprechenden Ansatz zur zweidimensionalen globalen meteorologischen Simulation mit

$$c_1 = k, \quad (\text{A3-2})$$

wobei k die Karman-Konstante [120] ist:

$$k \approx 0.4 \quad (\text{A3-3})$$

Zu diesem Ergebnis gelangt man [32], wenn μ und $\overline{D_{ij}}$ gleich ihren zeitlich gemittelten Werten in einer Grenzschicht konstanter Schubspannungen gesetzt werden. Hierfür gilt das logarithmische Wandgesetz [120]:

$$\langle u_1 \rangle = \frac{1}{k} \ln(z' \cdot E_w) \quad (\text{A3-4})$$

(z' =Wandabstand, E_w eine die Wandrauhigkeit berücksichtigende Konstante.) Hier ist also

$$\langle \tau_w \rangle = \mu \frac{\partial}{\partial z'} \langle u_1 \rangle = 1 = (c_1 h)^2 (k z')^{-2} \quad (\text{A3-5})$$

Falls die Höhe, zu der μ bestimmt werden soll, gleich h ist, folgt (A3-2). Dieses Ergebnis kann jedoch voraussetzungsgemäß bestenfalls nur für die unmittelbare Wandnähe gelten.

A3.2 Berechnung von c_1 nach Lilly [80, 81]

A3.2.1 Mittelungsoperation und Bestimmungsgleichung für c_1

Zur Ableitung der über Maschenvolumina gemittelten Grundgleichungen werden von Lilly [80, 81] und Deardorff [29, 33, 44] abwechselnd folgende Mittelungsoperationen verwendet.

$$a) \quad \overline{y}(x_1, x_2, x_3, t) \equiv \frac{1}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y(x_1 + z_1, x_2 + z_2, x_3 + z_3, t) dz_1 dz_2 dz_3 \quad (A3-6)$$

$$b) \quad \overline{y}(x_1, x_2, x_3, t) \equiv \frac{1}{h^3} \int_{x_1 - \frac{h}{2}}^{x_1 + \frac{h}{2}} \int_{x_2 - \frac{h}{2}}^{x_2 + \frac{h}{2}} \int_{x_3 - \frac{h}{2}}^{x_3 + \frac{h}{2}} y(z_1, z_2, z_3, t) dz_1 dz_2 dz_3 \quad (A3-7)$$

Für die erste gilt:

$$\frac{\partial \overline{y}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{y} \quad (A3-8)$$

Für die zweite gilt jedoch:

$$\frac{\partial \overline{y}}{\partial x_i} \neq \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{y} \quad (A3-9)$$

Eine konsistente Festlegung auf eine der beiden Mittelungsoperationen wurde nicht vorgenommen. Die Grundgleichungen zur Bestimmung der Konstanten c_1 werden von Lilly [81] mit der ersten, die Differenzenformeln von Deardorff [29] mit der zweiten abgeleitet, wobei zudem Gl. (A3-8) als Näherung vorausgesetzt wird. Die von Lilly unter Verwendung von (A3-6) abgeleitete Erhaltungsgleichung für $\overline{E'}$ lautet in ihren wesentlichen Termen:

$$\frac{\partial \overline{E'}}{\partial t} = -\text{Konv} + \text{Diff} - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{D_{ij}}}{\partial x_j} - \overline{\varepsilon'} \quad (A3-10)$$

Hierbei interessieren die Konvektions- und Diffusionsterme Konv und Diff nicht im einzelnen. $\overline{\varepsilon'}$ ist definiert als

$$\overline{\varepsilon'} = \nu \left[\overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} - \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right)^2 \right] \quad (A3-11)$$

und ist also ein der Dissipation entsprechender Term. Es wird nun vorausgesetzt, daß das Geschwindigkeitsfeld lokal isotrop ist und ein dem Kolmogorov-Spektrum entsprechendes Energiespektrum $E(k)$ besitzt. In (A3-10) wird der Ansatz (A3-1) eingesetzt. Der Zusatzterm $\frac{1}{3} \delta_{ij} \overline{u'_e u'_e}$ verschwindet wegen der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{1}{3} \overline{u'_e u'_e} \delta_{ij} \frac{\partial \overline{D_{ij}}}{\partial x_j} = \overline{u'_e u'_e} \frac{2}{3} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_i} = 0 \quad (A3-12)$$

Für stationäre und lokal isotrope Turbulenz gilt im zeitlichen Mittel

$$\left\langle \frac{\partial \overline{E'}}{\partial t} \right\rangle = \langle \text{Konv} \rangle - \langle \text{Diff} \rangle = 0 \quad (\text{A3-13})$$

und also erhält man als Bestimmungsgleichung für c_1 :

$$c_1 = \left[\frac{\langle \overline{E'} \rangle}{h^2 \left\langle \left[\frac{1}{2} (\overline{D_{ij}})^2 \right]^{1/2} \cdot \frac{1}{2} (\overline{D_{ij}})^2 \right\rangle} \right]^{1/2} \quad (\text{A3-14})$$

Hier wird als Näherung gesetzt

$$\left\langle \left(\frac{1}{2} (\overline{D_{ij}})^2 \right)^{3/2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} (\overline{D_{ij}})^2 \right\rangle^{3/2}, \quad (\text{A3-15})$$

sowie

$$\langle \overline{E'} \rangle = \langle \overline{E} \rangle, \quad (\text{A3-16})$$

wobei \overline{E} durch (1-16) definiert ist. Damit folgt:

$$c_1 \approx \left(\frac{\langle \overline{E} \rangle}{h^2 \left\langle \frac{1}{2} (\overline{D_{ij}})^2 \right\rangle^{3/2}} \right)^{1/2} \quad (\text{A3-17})$$

A3.2.2 Abschätzung von $\langle (\overline{D_{ij}})^2 \rangle$ [81]

Gemäß Gl. (A1-27) gilt

$$\langle (\overline{D_{ij}})^2 \rangle = 4 \int_0^\infty E(k) k^2 dk. \quad (\text{A3-18})$$

Approximiert man nun die quaderförmige Masche mit den Kantenlängen h durch eine Kugel mit Durchmesser h und beachtet, daß zu $\langle (\overline{D_{ij}})^2 \rangle$ nur diejenigen Teile des Energiespektrums beitragen, deren Wellenzahlen $k \leq k_0$ noch durch die makroskopische Struktur des gemittelten Geschwindigkeitsfeldes dargestellt werden können und nimmt gemäß Lilly [81] an

$$k_0 = \frac{\pi}{h}, \quad (\text{A3-19})$$

so folgt

$$\langle (\overline{D_{ij}})^2 \rangle = 4 \int_0^{\pi/h} k^2 E(k) dk. \quad (\text{A3-20})$$

Setzt man für $E(k)$ voraussetzungsgemäß (4-4) ein, so folgt

$$\langle (\overline{D_{ij}})^2 \rangle = 3 \left(\frac{\pi}{h} \right)^{4/3} \alpha \langle \overline{E} \rangle^{2/3} \quad (\text{A3-21})$$

und also für c_1 mit (A3-14):

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3\alpha} \right)^{3/4}. \quad (\text{A3-22})$$

Für $\alpha = 1.5$ folgt daraus

$$c_1 = 0.173. \quad (\text{A3-23})$$

A3.2.3 Numerische Berechnung von $\langle (\overline{v_{ij}})^2 \rangle$ für ein Quadvolumen

Nimmt man als Näherung an [80]:

$$\left\langle \frac{\overline{v_{u_2}}}{\partial x_1} \cdot \frac{\overline{v_{u_1}}}{\partial x_2} \right\rangle = - \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\overline{v_{u_2}}}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle, \quad (A3-24)$$

so folgt wegen (A1-23):

$$\left\langle \frac{1}{2} (\overline{v_{ij}})^2 \right\rangle = 3 \left\langle \left(\frac{\overline{v_{u_1}}}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle + 6 \left\langle \left(\frac{\overline{v_{u_2}}}{\partial x_1} \right)^2 \right\rangle. \quad (A3-25)$$

(A3-24) gilt, wie Lilly [80] selber feststellt, nur dann exakt, wenn das Mittelungsvolumen V den gesamten Strömungsraum erfaßt. Lilly [80] hat die in (A3-25) auftretenden Korrelationen entsprechend Anhang 2 für ein gleichseitiges Quadvolumen V bei Verwendung der Mittelungsoperation (A3-7)

numerisch berechnet. Die Ergebnisse lauten für $\alpha = 1.5$:

$$\left\langle \frac{1}{2} (\overline{v_{ij}})^2 \right\rangle = 10.05 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} h^{-4/3} \quad (A3-26)$$

$$c_1 = 0.177 \quad (A3-27)$$

Lilly [80] untersuchte zudem den Einfluß von Differenzenformeln auf die Konstante c_1 . Hierzu nahm er an, daß anstelle von

$$\frac{1}{2} \overline{v_{ij}^2} = \frac{\overline{v_{u_i}}}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{v_{u_i}}}{\partial x_j} + \frac{\overline{v_{u_j}}}{\partial x_i} \right) \quad (A3-28)$$

in (A3-17)

$$\frac{1}{2} \overline{v_{h_{ij}}^2} = \overline{\Delta_j u_i} \left(\overline{\Delta_j u_i} + \overline{\Delta_i u_j} \right) \quad (A3-29)$$

einzusetzen sei. Hierbei wird als Differenzenoperator Δ_i definiert:

$$\Delta_i y(x) \equiv [y(x + \frac{1}{2} e_i) - y(x - \frac{1}{2} e_i)] / h \quad (A3-30)$$

Zur numerischen Auswertung des so (A3-28) definierten Ausdrucks wertet Lilly gemäß der in Kap.4.2.2 dargestellten Methode numerisch sechsfache Integrale aus und erhält als Ergebnis für $\alpha = 1.5$:

$$\left\langle \frac{1}{2} (\overline{v_{h_{ij}}})^2 \right\rangle = 7.5 \langle \varepsilon \rangle^{2/3} h^{-4/3} \quad (A3-31)$$

und

$$c_1 = 0.22. \quad (A3-32)$$

A3.3 Deardorffs Erfahrungswerte für c_1

Gemäß Kap.1.5.3 hat Deardorff [29, 30, 31, 32, 33] numerische Rechnungen für Plattenströmungen durchgeführt. Das Deformationsgeschwindigkeitsquadrat in (5-3) wird nach folgenden Differenzenformeln (mit der Notation gemäß Kap.3) berechnet:

$$\frac{1}{2} (\overline{v_{ij}})^2 = \frac{1}{2} \overline{(\delta_{x_i} \bar{u}_j + \delta_{x_j} \bar{u}_i)^2} (1 - \delta_{[i][j][j]}) + 2 (\delta_{x_j} \bar{u}_i)^2 \delta_{[i][j][j]} \quad (A3-33)$$

Die Rechnungen für die Plattenströmung infolge eines aufgeprägten konstanten axialen Druckgradienten zeigte [28,29,30], daß die von Lilly berechneten Werte für c_1 bei Verwendung von (A3-33) zu groß sind. Um Turbulenzstatistiken zu erhalten, die mit der Erfahrung übereinstimmen, mußte c_1 im Bereich

$$0.08 \leq c_1 \leq 0.12 \quad (A3-34)$$

liegen. Für die Untersuchung der Stabilität der als Plattenströmung simulierten Atmosphäre unter Einfluß von Auftriebskräften infolge Temperaturgradient und Coriolis-Beschleunigung [33] ergab sich, daß im isothermen Fall ebenfalls gilt $c_1 \approx 0.13$ (außer in der Wandmasche, wo stets mit $c_1 = 0.10$ gerechnet wird) jedoch

$$c_1 \approx 0.21 \quad (A3-35)$$

bei vorhandenem Temperaturgradienten. Dieser Wechsel wird damit begründet, daß im isothermen Fall infolge der Coriolis-Kraft ein großer Beitrag der mittleren Deformationsgeschwindigkeit zu (A3-33) entsteht, der zu große turbulente Zähigkeiten gemäß (5-3) bewirken würde, wenn nicht c_1 verkleinert wird. Es wurde gefunden [33], daß der Wert $c_1 \approx 0.21$ immer anwendbar ist, wenn die mittlere Geschwindigkeit bei der Berechnung von $(\overline{v_{ij}})^2$ gemäß (A3-33) zuvor subtrahiert wird, also:

$$\frac{1}{2} (\overline{v_{ij}})^2 = \frac{1}{2} \overline{(\delta_{x_i} (\bar{u}_j - \langle u_j \rangle) + \delta_{x_j} (\bar{u}_i - \langle u_i \rangle))^2} (1 - \delta_{[i][j][j]}) + 2 (\delta_{x_j} (\bar{u}_i - \langle u_i \rangle))^2 \delta_{[i][j][j]} \quad (A3-36)$$

A3.4 Berechnung der kinetischen Energie $\overline{v_E^2}$

Die kinetische Energie tritt als Zusatzterm in (A3-1) auf, kann jedoch zusammen mit dem Druck je Masseneinheit behandelt werden; ihre explizite Kenntnis ist daher nicht zur Integration der Impuls-Gleichungen, wohl aber zur Auswertung erforderlich.

Eine grobe Abschätzung, entsprechend der für $\langle \overline{v_{ij}^2} \rangle$ in Kap. A3.2.2, ergibt:

$$\langle \overline{v_E^2} \rangle = \int_{\pi/h}^{\infty} E(k) dk \quad (A3-37)$$

und mit (4-4):

$$\langle \overline{v_E^2} \rangle = \frac{3}{2} \propto \langle \epsilon \rangle^{2/3} \left(\frac{h}{\pi} \right)^{2/3} \quad (A3-38)$$

Mit $\langle \varepsilon \rangle^{2/3}$ gemäß (A3-21) folgt:

$$\langle \overline{v_{E'}} \rangle = \langle (\overline{v_{ij}})^2 \rangle \cdot h^2 / (2\pi^2) \approx 0.050 \cdot h^2 \cdot \langle (\overline{v_{ij}})^2 \rangle \quad (\text{A3-39})$$

Deardorff [29, 33] berechnet $\overline{v_{E'}}$ unter Bezug auf Lilly [81] aus

$$\overline{v_{E'}} = 2 \mu^2 / (c_e \cdot h)^2 \quad \text{mit} \quad c_e = 0.094 \quad (\text{A3-40})$$

Mit μ gemäß (5-3) und c_1 gemäß (A3-32) folgt dann:

$$\langle \overline{v_{E'}} \rangle = \frac{c_1^2}{c_e^2} h^2 \langle (\overline{v_{ij}})^2 \rangle = 0.27 \cdot h^2 \langle (\overline{v_{ij}})^2 \rangle \quad (\text{A3-41, 42})$$

Die von Deardorff berechneten kinetischen Energien der Schwankungsgeschwindigkeiten werden danach als zu groß berechnet.

A3.5 Berechnung der Konstanten c_1 nach den Methoden des Kap.5.2.2.3.2 und des Anhangs 2

Setzt man den Ansatz (A3-1) in die Erhaltungsgleichung (3-31) für $\overline{v_{E'}}$ ein, mittelt gemäß Kap.5.2.2.3.2 zeitlich und sodann über den gesamten Strömungsraum und vernachlässigt die molekulare Dissipation infolge der makroskopischen Geschwindigkeiten, so folgt mit

$$\sigma_3 \equiv \langle (\frac{1}{2} \overline{v_{ij}}^2)^{3/2} \rangle / \langle \frac{1}{2} \overline{v_{ij}}^2 \rangle^{3/2} \quad (\text{A3-43})$$

für die Konstante c_1 :

$$c_1 = \left(\frac{\langle \varepsilon \rangle}{h^2 ({}_3D^2)^{1/2} {}_2D^2 \cdot \sigma_3} \right)^{1/2}, \quad (\text{A3-44})$$

wobei ${}_3D^2$ und ${}_2D^2$ gemäß (4-25, 26) definiert sind.

Verwendet man hier die Ergebnisse des Anhangs 2 so folgt

$$c_1 = \left[f_2^3 D12^2 (\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h) \cdot D13 (\Delta x_1/h, \Delta x_2/h, \Delta x_3/h) \right]^{1/4} \quad (\text{A3-45})$$

D12, D13 sind die in Tabelle 7 angegebenen FORTRAN-Unterprogramme. Für $\alpha = 1.5$, $\sigma_3 = 1$ folgt numerisch:

	$\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3 = 1 : 1 : 1$	$\Delta x_1 : \Delta x_2 : \Delta x_3 = 0.125 : 0.05 : 0.05$	(A3-46)
$c_1 =$	0.215	0.225	

Diese Werte stimmen gut mit dem Wert $c_1 = 0.21$ überein, der sich in [33] bewährt hat. Gl.(A3-46) zeigt zudem, daß der Fehler der Annahme (5-6) bei den von Deardorff [29] verwendeten Maschenweiten bezüglich des Betrages der Konstanten c_1 klein ist; dies heißt allerdings noch nicht, daß die damit berechneten Zähigkeiten bei ungleichseitigen Maschen richtig sind, wie in Kap.5 diskutiert.

A n h a n g 4 : Lösung der Poissongleichung unter Verwendung der Schnellen Fourier-Transformation

A4.1 Problem

In Kap. 6.2.2 wurde für die Berechnung des Hilfspotential ψ bzw. des tatsächlichen Druckes p als bestimmende Gleichung eine Poissongleichung mit Neumann-Randbedingungen aufgestellt; sie lautet in ausgeschriebener Differenzendarstellung für zylindrische Koordinaten (vergl. Abb. 5):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_R} \frac{1}{\Delta \tau_R} \left(\frac{\tau_{R+1/2}}{\Delta \tau_{R+1/2}} \psi_{i,j,k+1} - \left(\frac{\tau_{R+1/2}}{\Delta \tau_{R+1/2}} + \frac{\tau_{R-1/2}}{\Delta \tau_{R-1/2}} \right) \psi_{i,j,k} + \frac{\tau_{R-1/2}}{\Delta \tau_{R-1/2}} \psi_{i,j,k-1} \right) \\ & + \frac{1}{(\tau_R \Delta \varphi)^2} \left(\psi_{i,j+1,k} - 2 \psi_{i,j,k} + \psi_{i,j-1,k} \right) + \frac{1}{\Delta x^2} \left(\psi_{i+1,j,k} - 2 \psi_{i,j,k} + \psi_{i-1,j,k} \right) \quad (A4-1) \\ & = q_{i,j,k} ; \quad i = 1, 2, \dots, IM ; \quad j = 1, 2, \dots, JM ; \quad k = 1, 2, \dots, KM \end{aligned}$$

Randbedingungen:

a) Periodizität in φ, z -Richtung:

$$\psi_{i,j,k} = \psi_{i+I \cdot IM, j+J \cdot JM, k} ; \quad J = 0, \pm 1, \pm 2, \dots ; \quad J = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (A4-2)$$

b) $\delta_n \psi = 0$ an der Wand :

$$\psi_{i,j,0} = \psi_{i,j,1} ; \quad \psi_{i,j,KM} = \psi_{i,j,KM+1} ; \quad i = 1, 2, \dots, IM ; \quad j = 1, 2, \dots, JM. \quad (A4-3)$$

Durch diese Randbedingungen ist ψ nur bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Als Voraussetzung für die Existenz einer Lösung ist die Konsistenzbedingung zu beachten [87] :

$$\sum_{k=1}^{KM} \sum_{j=1}^{JM} \sum_{i=1}^{IM} q_{i,j,k} \Delta z \cdot \Delta \varphi \cdot \Delta \tau_R \cdot \tau_R = 0 \quad (A4-4)$$

A4.2 Lösungsprinzip

Im folgenden wird die Lösungsmethode beschrieben, deren Prinzip erstmals von Hockney [55] angegeben wurde. Es wird ein direktes Verfahren angewendet, das iterativen Verfahren [16] gegenüber wesentlich schneller zum Ergebnis führt und frei von Stabilitätsproblemen ist [61] . Das Verfahren ist dem von Williams [141] verwendeten sehr ähnlich. Die periodischen Randbedingungen erlauben jedoch die Verwendung schneller Fourier-Transformations-Routinen.

Zudem erlaubt die hier verwendete Methode variable Maschenweiten in radialer Richtung. Zusammen mit dem in [38,125] beschriebenen Transponierungsalgorithmus ist das hier verwendete Verfahren auch noch dann effektiv anwendbar, wenn die Felder ψ bzw. q nicht vollständig gleichzeitig im Kernspeicher Platz finden [128].

Die Lösungsmethode beruht auf einer Reihenentwicklung des Quellterms q und der Lösung ψ in azimuthaler und axialer Richtung in trigonometrischen Eigenfunktionen, die die periodischen Randbedingungen (A4-2) identisch erfüllen:

$$\psi_{i,j,k} = \sum_{v=0}^{JM-1} \sum_{\mu=0}^{IM-1} CP(\mu+1, v+1, k) e^{\sqrt{-1} \frac{v 2\pi (j-1)}{JM}} e^{\sqrt{-1} \frac{\mu 2\pi (i-1)}{IM}} \quad (A4-5)$$

$$q_{i,j,k} = \sum_{v=0}^{JM-1} \sum_{\mu=0}^{IM-1} CQ(\mu+1, v+1, k) e^{\sqrt{-1} \frac{v 2\pi (j-1)}{JM}} e^{\sqrt{-1} \frac{\mu 2\pi (i-1)}{IM}} \quad (A4-6)$$

Es wird darauf verzichtet, auch in radialer Richtung eine Reihenentwicklung in Eigenfunktionen zu verwenden, da hier Besselfunktionen verwendet werden müssen, die numerisch weitaus komplizierter zu behandeln wären. Die Verwendung komplexer Eigenfunktionen ist gegenüber einer Entwicklung in den reellen Eigenfunktionen (sin und cos) (wie in [141]) vorteilhafter, weil sonst anstelle von einem Produkt zweier Eigenfunktionen vier Produkte zu behandeln wären und zudem für $v=\mu=0$ Sonderfälle auftreten, die bei der komplexen Schreibweise vermieden werden [50].

Die komplexen Koeffizienten CQ in (A4-6) lassen sich aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenfunktionen berechnen gemäß

$$CQ(\mu+1, v+1, k) = \frac{1}{IM \cdot JM} \sum_{j=1}^{JM} \sum_{i=1}^{IM} q_{i,j,k} e^{-\sqrt{-1} \frac{v 2\pi (j-1)}{JM}} e^{-\sqrt{-1} \frac{\mu 2\pi (i-1)}{IM}} \quad (A4-7)$$

$\mu = 0, 1, 2, \dots, IM-1; v = 0, 1, 2, \dots, JM-1; k = 1, 2, \dots, KM.$

Während die Ausgangsdaten $q_{i,j,k}$ für $k=\text{const}$ aus $IM \cdot JM$ reellen Zahlen bestehen, bilden die Fourierkoeffizienten CQ $IM \cdot JM$ komplexe Zahlen, also doppelt so viele Einzelwerte. Von dieser Datenmenge muß jedoch nur die Hälfte gespeichert werden, da gilt:

$$CQ(\mu+1, v+1, k) = CQ^*(IM-\mu+1, JM-v+1, k) \quad (A4-8)$$

$v = 0, 1, 2, \dots, (JM-1)/2$
 $\mu = 0, 1, 2, \dots, (IM-1)/2$
 $v, \mu \neq 0, 0$

$$CQ(1, 1, k) = CQ^*(1, 1, k) \text{ (reell)}$$

(Der Stern kennzeichnet konjugiert komplexe Werte)

A4.3 Auswertung mit der Schnellen Fourier-Transformation (FFT)

Die Gl.(A4-7) sowie, bei bekannten CP-Werten, Gl.(A4-5) werden nach dem von Cooley und Tukey [19] entwickelten Verfahren der Schnellen Fourier-Transformation (FFT) ausgewertet. Eine ausführliche Beschreibung dieser Transformationen findet sich in [20]. Bei der FFT werden die Periodizitätseigenschaften der harmonischen Funktionen ausgenutzt, um eine Vielzahl von Multiplikationen auf eine zurückzuführen. Während bei einer direkten Auswertung der Summen in (A4-5,7) die Anzahl der Multiplikationen proportional zu $(IM \cdot JM)^2$ wächst, sind bei der FFT nur proportional $(IM \cdot JM) \ln(IM \cdot JM)$ Operationen notwendig. Die FFT ist nur dann besonders effektiv (ähnlich beim Transponieren [125]), wenn die Faktoren IM und JM in möglichst viele, kleine Primzahlen zerlegbar sind. Die Algorithmen werden zudem besonders einfach, wenn diese Primfaktoren alle gleich zwei sind. Ein entsprechendes Programm "FOUR2" zur FFT hat Brenner [14] erstellt; es wird hier verwendet.

A4.4 Aufstellung der Differenzengleichung für CP

$$\begin{aligned} \text{(Abkürzung)} \quad CP_{\mu, \nu, k} &\equiv CP(\mu+1, \nu+1, k) \\ CQ_{\mu, \nu, k} &\equiv CQ(\mu+1, \nu+1, k) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $CP_{\mu, \nu, k}$ werden aus der Differenzengleichung (A4-1) bestimmt, in die der Ansatz (A4-5,6) eingesetzt wird. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_R \Delta \tau_R} \frac{\tau_{R+1/2}}{\Delta \tau_{R+1/2}} CP_{\mu, \nu, R+1} - \left\{ \frac{1}{\tau_R \Delta \tau_R} \left(\frac{\tau_{R+1/2}}{\Delta \tau_{R+1/2}} + \frac{\tau_{R-1/2}}{\Delta \tau_{R-1/2}} \right) + \frac{\lambda_\nu}{(\Delta \varphi \tau_R)^2} + \lambda_\mu \right\} CP_{\mu, \nu, R} \\ + \frac{1}{\tau_R \Delta \tau_R} \frac{\tau_{R-1/2}}{\Delta \tau_{R-1/2}} CP_{\mu, \nu, R-1} = CQ_{\mu, \nu, R} \end{aligned} \quad (A4-9)$$

$$R = 1, 2, \dots, KM$$

$$\lambda_\mu = \frac{2}{\Delta x^2} \left(1 - \cos \left(\mu \frac{2\pi}{IM} \right) \right), \quad \lambda_\nu = 2 \left(1 - \cos \left(\nu \frac{2\pi}{JM} \right) \right) \quad (A4-10)$$

$$\nu = 0, 1, 2, \dots, (JM-1); \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, (IM-1).$$

Aus der Randbedingung (A4-3) folgt zudem

$$CP_{\mu, \nu, 1} = CP_{\mu, \nu, 0} \quad (A4-11)$$

$$CP_{\mu, \nu, KM} = CP_{\mu, \nu, KM+1}$$

Die Gleichungen (A4-9, 10, 11) bilden IM·JM unabhängige lineare Gleichungs-

systeme für die komplexen Koeffizienten $CP_{\mu, \nu, k}$; $k=0, 1, 2, \dots, KM, KM+1$. Diese Gleichungen haben eindeutige Lösungen nur für $(\frac{\lambda \nu}{(\Delta \tau_R)^2} + \lambda \mu) \neq 0$, da andernfalls

die Lösung nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, d.h. nur für $\nu, \mu \neq 0, 0$. Der Fall $\nu, \mu = 0, 0$ muß gesondert betrachtet werden. Nach Division durch $\left\{ -\frac{\tau_{k+1/2}}{\tau_k \Delta \tau_k \Delta \tau_{k+1/2}} \right\}$ folgt aus (A4-9) in abgekürzter Schreibweise

$$-CP_{\mu, \nu, k+1} + B(k) CP_{\mu, \nu, k} - C(k) CP_{\mu, \nu, k-1} = D_k \quad (A4-12)$$

mit

$$\begin{aligned} C(k) &= \frac{\Delta \tau_{k+1/2} \cdot \tau_{k-1/2}}{\Delta \tau_{k-1/2} \cdot \tau_{k+1/2}} \\ B(k) &= 1 + C(k) + \frac{\Delta \tau_k \cdot \Delta \tau_{k+1/2} \cdot \tau_k}{\tau_{k+1/2}} \left(\frac{\lambda \nu}{(\Delta \tau_R)^2} + \lambda \mu \right) \\ D(k) &= -\frac{\tau_k}{\tau_{k+1/2}} \Delta \tau_k \Delta \tau_{k+1/2} \cdot CQ_{\mu, \nu, k} \end{aligned} \quad (A4-13)$$

A4.5 Lösung der Differentialgleichung für CP

A4.5.1 Fall $\nu, \mu \neq 0, 0$

Das Gleichungssystem (A4-12) kann für $\nu, \mu \neq 0, 0$ mit dem Gauss'schen Eliminationsalgorithmus gelöst werden, der für derartige tridiagonal aufgebaute Systeme einfach und schnell ist. Für die vorliegenden Gleichungen existiert jedoch eine dem Gauss'schen Algorithmus entsprechende einfache rekursive Lösungsvorschrift [111, 141], die zudem numerisch sehr stabil ist [111, S.198].

Es wird folgender Ansatz verwendet:

$$CP_{\mu, \nu, k} = CP_{\mu, \nu, k+1} \cdot E(k) + F(k), \quad k = KM, KM-1, \dots, 1; \quad (A4-14)$$

Hieraus folgt:

$$CP_{\mu, \nu, k-1} = CP_{\mu, \nu, k+1} \cdot E(k) E(k-1) + F(k) \cdot E(k-1) + F(k-1).$$

Werden beide Beziehungen in (A4-12) eingesetzt, so folgen für beliebiges CP die Bedingungen

$$\begin{aligned} E(k) &= 1/(B(k) - C(k) \cdot E(k-1)) \\ F(k) &= (C(k) F(k-1) + D(k)) \cdot E(k) \end{aligned} \quad (A4-15)$$

Die Randbedingung (A4-11) ist bei $k=1$ erfüllt, wenn gilt

$$\begin{aligned} E(0) &= 1 \\ F(0) &= 0 \end{aligned}$$

Ausgehend von diesen Werten können alle $E(k)$, $F(k)$ für $k=1,2,\dots,KM$ aus (A4-15) berechnet werden. ($E(k)$ ist wie $B(k)$ von μ, ν abhängig und kann daher leider nicht, wie in [41] behauptet, ein für alle mal berechnet werden). Aus der Randbedingung (A4-11) bei $k=KM$ und (A4-14) folgt:

$$CP_{\mu, \nu, KM} = F(KM) / (1 - E(KM)) \quad (A4-16)$$

Mit diesem Anfangswert können dann gemäß (A4-14) alle $CP_{\mu, \nu, k}$ für $k=KM-1, KM-2, \dots, 1$ errechnet werden.

A4.5.2 Fall $\nu, \mu = 0, 0$; Konsistenzbedingung

Für $\nu = \mu = 0$ kann willkürlich z.B.

$$CP_{0,0,1} = 0$$

gesetzt werden. Aus der Randbedingung (A4-11) und aus (A4-12) folgt dann

$$CP_{0,0,2} = -D(1)$$

die restlichen $CP_{0,0,k}$ können für $k=3,4,\dots,KM$ gemäß (A4-12) aus

$$CP_{0,0,k} = B(k-1) \cdot CP_{0,0,k-1} - C(k-1) CP_{0,0,k-2} - D(k-1) \quad (A4-17)$$

berechnet werden.

Damit hierdurch auch die Randbedingung bei $k=KM$ (A4-11) erfüllt werden kann, muß $D(k)$ eine Bedingung erfüllen, die der Konsistenzbedingung (A4-4) entspricht und im folgenden abgeleitet wird:

Mit der Abkürzung für den Gradienten von CP

$$g_{k+1/2} \equiv \tau_{k+1/2} (CP_{0,0,k+1} - CP_{0,0,k}) / \Delta \tau_{k+1/2}$$

folgt aus (A4-9)

$$\frac{1}{\tau_k \Delta \tau_k} (g_{k+1/2} - g_{k-1/2}) = CQ_{0,0,k}$$

und aus (A4-11) $g_{1/2} = 0$

Durch vollständige Induktion ist leicht zu zeigen, daß hieraus folgt:

$$g_{k+1/2} = \sum_{k'=1}^k \tau_{k'} \cdot \Delta \tau_{k'} \cdot CQ_{0,0,k'}$$

Damit die Randbedingung (A4-11)

$$g_{KM+1/2} = 0$$

erfüllt sein kann, muß also gelten:

$$\sum_{k=1}^{KM} CQ_{0,0,k} \cdot \tau_k \cdot \Delta \tau_k = 0$$

Diese Bedingung ist der Forderung (A4-4) direkt äquivalent, da für $\nu=\mu=0$ aus (A4-7) folgt:

$$CQ_{0,0,k} = \frac{1}{IM \cdot JM} \sum_{j=1}^{JM} \sum_{i=1}^{IM} q_{i,j,k}$$

Da $q_{i,j,k}$ gleich der Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes $\{\tilde{v}_x, \tilde{v}_y, \tilde{v}_z\}$ ist, deren Komponente \tilde{v}_x an der Wand gemäß (6-5) stets gleich Null ist, ist obige Konsistenzbedingung theoretisch entsprechend (A5-11)) stets exakt erfüllt. Infolge Rundungsfehler kann jedoch die Summe (A4-4) von Null geringfügig verschieden sein. Dies wiederum kann - wie eigene numerische Experimente zeigten - die Ursache für die Nichtkonvergenz iterativer Lösungsverfahren sein. Das hier beschriebene Verfahren ist dagegen bezüglich derartiger Rundungsfehler unempfindlich.

Die Vorteile des beschriebenen Verfahrens sind also:

- exakte Lösung (bei Vernachlässigung der Rundungsfehler) nach endlicher Rechenzeit
- sehr kleine Rechenzeit (vergl. Kap. 10).

Die Nachteile sind die Festlegung der Werte IM, JM auf Potenzen von zwei, sowie die mangelnde Übertragbarkeit auf Probleme mit komplizierteren geometrischen Berandungen.

Anhang 5 : Genauigkeit und Konsistenz der Differenzenformeln

A5.1 Statistische Fehler der linearen Differenzenapproximationen

Eine typische lineare Differenzenapproximation ist die Näherung

$$\overline{u}_1(x_1, x_2, x_3, t) = \overline{u}_1^* = \frac{1}{2} \left(\overline{u}_1(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3, t) + \overline{u}_1(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3, t) \right) \quad (\text{A5-1})$$

Diese Näherung setzt voraus, daß $\overline{u}_1(x_1, x_2, x_3, t)$ ein hinreichend glattes Feld ist, so daß lineare Interpolationen zulässig sind. Bei lokal homogener Turbulenz ist die Näherung im statistischen Sinne sicherlich richtig. Dennoch kann zu jedem bestimmten Zeitpunkt obige Approximation einen Fehler haben, der durch folgende Standardabweichung f charakterisiert ist:

$$f^2 = \left\langle \left[\overline{u}_1(x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{2} (\overline{u}_1(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3) + \overline{u}_1(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3)) \right]^2 \right\rangle \quad (\text{A5-2})$$

Unter Voraussetzung lokalisotroper Turbulenz ergibt sich hierfür gemäß Anhang 2:

$$f^2 = \langle \overline{u}_1, \overline{u}_1(0) \rangle + \frac{1}{2} \langle \overline{u}_1, \overline{u}_1(0) \rangle + \frac{1}{2} \langle \overline{u}_1, \overline{u}_1(\Delta x_1, 0, 0) \rangle - 2 \langle \overline{u}_1, \overline{u}_1(\frac{\Delta x_1}{2}, 0, 0) \rangle \quad (\text{A5-3})$$

Und mit (A2-40, 41, 42) für gleichseitige Maschen

$$f^2 = f_2 \cdot \langle \varepsilon \rangle^{2/3} \Delta x_1^{2/3} \left[2 d_3^*(1, 1, 1, \frac{1}{2}, 0) - d_2^*(1, 1, 1, 0, 0) - \frac{1}{2} d_1^*(1, 1, 1, 0, 0) - d_1^*(1, 1, 1, 1, 0) \right] \quad (\text{A5-4})$$

$$f = 0.0641 f_2 \langle \varepsilon \rangle^{1/3} \Delta x_1^{1/3} \quad (\text{A5-5})$$

Dieser statistische Fehler sinkt also mit kleiner werdender Maschenkante Δx_1 , jedoch gemäß der Potenz $1/3$ nur langsam. Dies Ergebnis ist natürlich nur im Bereich der Gültigkeit des Kolmogorov-Spektrums gemäß (4-6) anwendbar. Sowohl für sehr große Maschen, wo $\overline{u}_1, \overline{u}_2$ bei homogener Turbulenz gegen konstante Werte streben, als auch bei sehr kleinen Maschenweiten, wo sich die Glättung infolge der molekularen Zähigkeit bemerkbar macht, dürfte der Fehler kleiner sein. Obiges Ergebnis ist also eine pessimistische Aussage.

Würde man nicht Flächenmittelwerte, sondern Punkt-Geschwindigkeiten durch arithmetische Mittelung entsprechend

$$u_1 = \overline{u}_1^*$$

approximieren, so erhält man aus (4-6):

$$f = \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{2/3} - \frac{3}{8} \right]^{1/2} f_2^{1/2} \langle \epsilon \rangle^{1/3} \Delta x_1^{1/3} = 0.755 \cdot f_2^{1/2} \langle \epsilon \rangle^{1/3} \Delta x_1^{1/3} \quad (\text{A5-6})$$

D.h., die Mittelungsoperation verkleinert den Fehler zwar um etwa den Faktor 3, verändert ihn jedoch nicht prinzipiell.

Ähnlich wie im Feinstrukturmodell (Kap.5.2.2.5.3) wäre anstelle obiger (A5-1) deterministischer Approximation eine statistische Approximation denkbar, deren Mittelwert (A5-1) entsprechen müßte. Im Gegensatz zum Feinstrukturmodell liegt hier sogar mit (A5-5) ein Ansatz zur Festlegung der Standardabweichung vor.

A5.2 Abbruchfehler

A5.2.1 Begrenzte Phasen- und Wellenzahlenauflösung

Wie Orszag [96] ausführlich diskutiert hat, führen Differenzenapproximationen zu Fehlern, die sich sowohl in fehlerhaften Amplituden als auch Phasen der Lösungen auswirken, wobei diese Fehler insbesondere für Fourierkomponenten mit großen Wellenzahlen groß sind. Die Phasenfehler würden bei der Verwendung der Galerkin-Methode (vergl. Kap.1.5.2) entfallen. Deardorff [33] weist jedoch darauf hin, daß das Energiespektrum der im Maschennetz aufgelösten kinetischen Energie bei den maximal auflösbaren Wellenzahlen sehr steil abfällt (etwa mit k^{-4}), so daß diese Fehler nur mit relativ kleinem Gewicht eingehen. (Vergl. Abb.23)

Mit Differenzenapproximationen bei Maschennetzen der Kantenlänge Δx ist es prinzipiell unmöglich, Fourier-Komponenten mit kleineren Wellenlängen als $2 \cdot \Delta x$ darzustellen [94].

A5.2.2 Abbruchfehler der konvektiven Terme

Setzt man voraus, daß die gemittelten Geschwindigkeitsfelder \bar{u}_i durch Taylor-Reihen-Entwicklungen darstellbar sind, so kann man den Abbruchfehler der Differenzenformeln bestimmen. Besonders wichtig sind hier die Abbruchfehler der konvektiven Terme. Betrachtet man kartesische Koordinaten, so erhält man beispielsweise

$$\delta_{x_1} (\bar{u}_1' \bar{u}_1') = \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 \cdot u_1) + f \quad (\text{A5-7})$$

$$f = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\Delta x_1^2}{2} + \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} u_1 \frac{\Delta x_1^2}{3} + O(\Delta x_1^4)$$

Günstiger erscheint hier die von Amsden-Harlow [3] verwendete Näherung

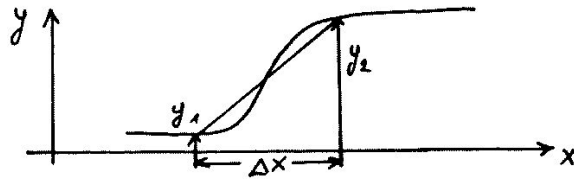
$$2 u_1 \delta_{x_1} \bar{u}_1' = \frac{\partial}{\partial x_1} (u_1 \cdot u_1) + f \quad (\text{A5-8})$$

$$f = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} u_1 \frac{\Delta x_1^2}{3} + O(\Delta x_1^4),$$

da hier insbesondere der Abbruchfehler keine zweite Ableitung enthält; dies hat einen günstigen Einfluß auf das Stabilitätsverhalten. Der Nachteil dieser Approximation besteht jedoch darin, daß die Differenzenformeln dann nicht den Erhaltungssätzen der kinetischen Energie entsprechen, was zu Instabilitäten infolge Aliasing führen kann (vergl. Kap. A5.3 und A5.4); diese Art der Approximation wird daher hier wie z.B. auch in [54,79,94] nicht verwendet.

A5.2.3 Falsche Diffusion

Falsche Diffusion ("false diffusion") wird z.B. in [49] erläutert. Sie entsteht durch das begrenzte Auflösungsvermögen im Differenzennetz für große Gradienten. Beispielsweise besitze die Funktion $y(x)$ bei x_0 eine Rampe :



Im Differenzennetz kann jedoch maximal nur der Gradient $(y_2 - y_1) / \Delta x$ dargestellt werden. Das Feld y wird also künstlich geglättet, was wie eine falsche Diffusion erscheint. Dieser Fehler ist insbesondere dann groß, wenn der maximale Gradient nicht in Richtung der Koordinatenlinien sondern in der Diagonale der Masche verläuft. Die Maschenkanten sollten daher möglichst parallel bzw. senkrecht zu den Stromlinien verlaufen. Für die mittlere Strömung ist diese Voraussetzung erfüllt.

A5.3 Aliasing-Fehler

Der Aliasing-Fehler entsteht aufgrund nichtlinearer Terme; er wurde zuerst von Phillips [100] für die konvektiven Terme nachgewiesen; Miyakoda [87] zeigte, daß er auch infolge nichtlinearer Zähigkeit entstehen kann. Dieser Fehler wird außerdem in [1,10,79, 96,100] diskutiert. Der Fehler beruht auf der endlichen Wellenzahlenauflösung. Werden zwei ortsabhängige Funktionen,

die beide Fourierkomponenten mit den Wellenzahlen $k = 0, 1, 2, \dots, N$ enthalten, miteinander multipliziert, so entsteht ein Produkt, das Fourierkomponenten mit $k = 0, 1, 2, \dots, 2N$ enthält; im Differenzennetz können jedoch nur die Komponenten mit $k \leq N$ wiedergegeben werden; die Komponenten mit höheren Wellenzahlen werden dadurch den Komponenten mit kleineren Wellenzahlen zugeschlagen. Hierdurch wird der physikalische Energietransport von kleinen zu großen Wellenzahlen teilweise rückgängig gemacht. Dieser Effekt kann zu Instabilitäten führen. Als Heilmittel hat es sich hier bewährt, die Differenzenformeln so zu gestalten, daß sie gemäß Kap. A5.4 energieerhaltend sind.

A5.4 Konsistenz mit physikalischen Erhaltungssätzen

Aufgrund der Wandhaftbedingung und der periodischen Randbedingungen gilt bei Abwesenheit von Feldkräften und für verschwindende Zähigkeiten:

Impulserhaltung:

$$\iiint_V \frac{\partial u_i}{\partial t} dV = 0; \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A5-9})$$

Energieerhaltung:

$$\iiint_V \frac{\partial (u_i^2/2)}{\partial t} dV = 0, \quad (\text{A5-10})$$

wenn V das gesamte Strömungsvolumen umfaßt und das Geschwindigkeitsfeld die Kontinuitätsgleichung exakt erfüllt. Von den Differenzenformeln ist nun als Voraussetzung der Konsistenz mit diesen physikalischen Gesetzen entsprechend zu fordern, daß die Summen über die entsprechenden Differenzenapproximationen über alle Differenzenmaschen ebenfalls verschwinden.

Für den Impuls gelten diese Erhaltungssätze für die Differenzenformeln offensichtlich, da die konvektiven Terme in ihrer konservativen Form verwendet werden und also z.B.

$$\sum_{k=1}^{KM} \sigma_{x_3} (\bar{u}_3^1 \bar{u}_1^3) = \left[\bar{u}_3^1 \bar{u}_1^3 \Big|_{k=KM+\frac{1}{2}} - \bar{u}_3^1 \bar{u}_1^3 \Big|_{k=\frac{1}{2}} \right] / [x_{KM+\frac{1}{2}} - x_{\frac{1}{2}}] \quad (\text{A5-11})$$

ist und die rechte Seite wegen $u_3 = 0$ verschwindet. Für die Energie läßt sich entsprechendes gemäß [78] beweisen. Hierbei muß jedoch vorausgesetzt werden, daß auch in Differenzenform die Kontinuitätsgleichung exakt erfüllt wird.

Piacsek-Williams [105] haben Differenzenformeln abgeleitet, bei denen diese Voraussetzung für die Energieerhaltung nicht notwendig ist; hier ist dann aber die Impulserhaltung nur bei Einhaltung der Kontinuitätsgleichung gegeben. Dennoch sind die Vorschläge von Piacsek-Williams bei numerisch ungenauer Einhaltung der Kontinuitätsgleichung (z.B. wegen iterativer Lösung der Poisson-Gl.(6-9)) attraktiv, da die Energieerhaltung wegen ihrer quadratischen Art für die Stabilität wichtiger als die Impulserhaltung sein dürfte. Da in dieser Arbeit die Kontinuitätsgleichung durch die sehr genaue Druckberechnung stets mit sehr kleinen Fehlern erfüllt ist, erscheint die Verwendung der Formeln von Piacsek-Williams jedoch nicht notwendig.

A5.5 Numerische Fehler

Numerische Fehler entstehen bekanntlich infolge der begrenzten Anzahl dezimaler oder dualer Stellen, die in einem Rechner für die Darstellung von Gleitkommazahlen zur Verfügung stehen. Diese begrenzte Stellenzahl wirkt sich besonders deutlich bei der Berechnung der Differenz zweier etwa gleich großer Zahlen aus; z.B. ist bei 3 Dezimalstellen

$$0.164E2 - 0.163E2 = 0.1??E0$$

Die Differenz ist im Beispiel nur noch auf eine Stelle genau. Während dieser Effekt bei der Differenzbildung allgemein bekannt ist, wird der bei der Summation sehr vieler Zahlen gleicher Größenordnung in einen Summenakkumulator entstehende Fehler allgemein nicht beachtet. Werden beispielsweise bei einer Anlage mit 3 Dezimalstellen zur Darstellung von Gleitkommazahlen nach folgender Vorschrift (FORTRAN) 10000 Zahlen A(I) der Größenordnung 1. addiert;

```
S = 0.  
DO 1 I = 1,10000  
1 S = S+A(I) ,
```

so unterscheidet sich nach 1000 Summationen das Zwischenergebnis in S um 3 Zehnerpotenzen von den A(I) und die Summe S verändert sich wegen

$$0.100E4 + 0.1E1 = 0.100E4$$

nicht mehr.

Derartige numerische Fehler können klein gehalten werden, wenn folgende Regeln beachtet werden:

Differenzbildung:

Regel 1:

Transformiere die Zahlen so, daß ihr Mittelwert gleich Null ist.

Summenbildung:

Regel 2:

Bei der Summation von Summanden unterschiedlicher Größenordnung in einen Akkumulator ist zunächst über die Summanden der kleinsten Größenordnung zu summieren.

Regel 3:

Bei der Summation vieler Zahlen der gleichen Größenordnung sind möglichst viele Teilsummen zu bilden, über die sodann summiert wird. Obige Summation ist also besser wie folgt zu programmieren:

```
SO   =  0.
DO 1  I = 1,100
S1   =  0.
DO 2  J = 1, 100
2  S1  =  S1+A(J+(I-1)*100)
1  SO  =  SO+S1
```

Regel 1 wird in dieser Arbeit durch eine Galilei-Transformation (vergl.Kap.7.2), die anderen Regeln werden durch entsprechendes Programmieren berücksichtigt.

A n h a n g 6 : Stabilität der Differenzenformeln

A6.1 Lineare Stabilitätsanalyse

A6.1.1 Übersicht und Linearisierung

In diesem Kapitel werden für die linearisierten Differenzenformeln Stabilitätskriterien erstellt.

Außer den verwendeten Formeln

Typ a) gemäß (6-4), Bocksprung-Verfahren in der Zeit, zentrale Differenzenquotienten für die konvektiven Terme, zeitlich verzögerte Diffusionsterme

Typ b) gemäß (5-100, 6-20,24), Euler-Verfahren in der Zeit "upwind" Differenzen für die konvektiven Terme

wird, da verschiedentlich empfohlen[42, 44,112], eine weitere mögliche Differenzenformel

Typ c) Bocksprung-Verfahren in der Zeit, zentrale Differenzenformeln für die konvektiven Terme und DuFort-Frankel-Methode [111] für die Diffusionsterme

untersucht. Hierbei zeigt sich, daß dieses Verfahren bei kleinen Zähigkeiten in mehr als einer Dimension den anderen unterlegen ist.

Weiterhin ist die Möglichkeit untersucht worden, auch bei Typ a) "upwind"-Differenzen für die konvektiven Terme zu verwenden; hierbei wurde festgestellt, daß das Verfahren dann stets instabil wäre; es wird hierauf daher nicht im einzelnen eingegangen.

Die Linearisierung betrifft:

- Annahme konstanter Konvektionsgeschwindigkeiten $\{ V_x, V_y, V_z \}$
- Annahme konstanter Zähigkeiten μ
- Vernachlässigung von Druckgradienten und Feldkräften
- Annahme periodischer Randbedingungen in allen Richtungen

Weiterhin werden die Impulsgleichungen so vereinfacht, daß sie entkoppelt werden; diese Entkopplung gilt exakt für kartesische Koordinaten. Zudem werden äquidistante Maschen und isotrope Zähigkeiten angenommen. Damit ergeben sich folgende linearisierte Gleichungen (y steht für eine der Ge -

schwindigkeitskomponenten v_x, v_y, v_z bzw. die kinetische Energie $\frac{1}{2}mv^2$):

$$\text{Typ a)} \quad \frac{y_{i,j,k}^{n+1} - y_{i,j,k}^{n-1}}{2\Delta t} + K_a^n = D_a^{n-1} \quad (\text{A6-1})$$

$$\text{Typ b)} \quad \frac{y_{i,j,k}^{n+1} - y_{i,j,k}^n}{\Delta t} + K_b^n = D_a^n \quad (\text{A6-2})$$

$$\text{Typ c)} \quad \frac{y_{i,j,k}^{n+1} - y_{i,j,k}^{n-1}}{2\Delta t} + K_c^n = D_c^n \quad (\text{A6-3})$$

$$\text{mit} \quad K_a^n = V_x \frac{y_{i+1,j,k}^n - y_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + V_y \frac{y_{i,j+1,k}^n - y_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + V_z \frac{y_{i,j,k+1}^n - y_{i,j,k-1}^n}{2\Delta z} + V_r \frac{y}{r} \delta y_{vp} \quad (\text{A6-4})$$

$$\begin{aligned} K_b^n = & \frac{V_x + |V_x|}{2} \cdot \frac{y_{i,j,k}^n - y_{i-1,j,k}^n}{\Delta x} + \frac{V_x - |V_x|}{2} \cdot \frac{y_{i+1,j,k}^n - y_{i,j,k}^n}{\Delta x} \\ & + \frac{V_y + |V_y|}{2} \cdot \frac{y_{i,j,k}^n - y_{i,j-1,k}^n}{\Delta y} + \frac{V_y - |V_y|}{2} \cdot \frac{y_{i,j+1,k}^n - y_{i,j,k}^n}{\Delta y} \\ & + \frac{V_z + |V_z|}{2} \cdot \frac{y_{i,j,k}^n - y_{i,j,k-1}^n}{\Delta z} + \frac{V_z - |V_z|}{2} \cdot \frac{y_{i,j,k+1}^n - y_{i,j,k}^n}{\Delta z} + V_r \frac{y}{r} \delta y_{vp} \end{aligned} \quad (\text{A6-5})$$

$$\begin{aligned} D_a^n = \mu \left\{ & \frac{y_{i+1,j,k}^n - 2y_{i,j,k}^n + y_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} \right. \\ & + \frac{y_{i,j+1,k}^n - 2y_{i,j,k}^n + y_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} - \frac{y_{i,j,k}^n}{r^2} (\delta y_{vp} + \delta y_{vr}) \\ & \left. + \frac{y_{i,j,k+1}^n - 2y_{i,j,k}^n + y_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} + \frac{y_{i,j,k+1}^n - y_{i,j,k-1}^n}{r \cdot \Delta z} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A6-6})$$

$$\begin{aligned} D_c^n = \mu \left\{ & \frac{y_{i+1,j,k}^n - (y_{i,j,k}^n + y_{i,j,k}^n) + y_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2} \right. \\ & + \frac{y_{i,j+1,k}^n - (y_{i,j,k}^n + y_{i,j,k}^n) + y_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2} - \frac{y_{i,j,k}^n}{r^2} (\delta y_{vp} + \delta y_{vr}) \\ & \left. + \frac{y_{i,j,k+1}^n - (y_{i,j,k}^n + y_{i,j,k}^n) + y_{i,j,k-1}^n}{\Delta z^2} + \frac{y_{i,j,k+1}^n - y_{i,j,k-1}^n}{r \cdot \Delta z} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A6-7})$$

$$\delta y_{vp} = \begin{cases} 0 & , \quad y \neq v_p \\ 1 & , \quad y = v_p \end{cases} \quad \delta y_{vr} = \begin{cases} 0 & , \quad y \neq v_r \\ 1 & , \quad y = v_r \end{cases} \quad (\text{A6-8})$$

Die Schreibweise der "upwind"-Differenzen gemäß (A6-5) entspricht dem Vorschlag von Kirsch [72].

A6.1.2 Allgemeines Stabilitätskriterium [111,140]

Die linearen, homogenen Differenzengleichungen lassen sich in Matrixform darstellen als

$$y_{i,j,k}^{n+1} = \underline{A1} \cdot \underline{Y_{i,j,k}^n} + \underline{A2} \cdot \underline{Y_{i,j,k}^{n-1}} \quad (\text{A6-9})$$

mit

$$\underline{Y_{i,j,k}} = \{y_{i,j,k}; y_{i-1,j,k}; y_{i+1,j,k}; y_{i,j-1,k}; y_{i,j+1,k}; y_{i,j,k-1}; y_{i,j,k+1}\}^T$$

Die aus je 7 Elementen bestehenden Vektoren $\underline{A1}$, $\underline{A2}$ sind für die verschiedenen Formel-Typen in Tabelle 8 angegeben. Diese Differenzengleichungen besitzen die allgemeine Lösung

$$y_{i',j',k'}^n = \underline{U_{i,j,k}^n} \exp\left\{\underline{\xi} [k_1(i'-i)\Delta x + k_2(j'-j)\Delta y + k_3(k'-k)\Delta \tau]\right\} \quad (\text{A6-10})$$

$\underline{\xi} \equiv \sqrt{-1}$

k_1, k_2, k_3 sind irgendwelche Wellenzahlen. Für den Vektor $\underline{Y_{i,j,k}}$ folgt hieraus wegen $\exp\{\underline{\xi} x\} = \cos(x) + \underline{\xi} \sin(x)$:

$$\underline{Y_{i,j,k}^n} = \underline{U_{i,j,k}^n} \cdot \underline{E} \quad (\text{A6-11})$$

$$\underline{E} \equiv \{1; -\underline{\xi} S_1 + C_1; \underline{\xi} S_1 + C_1; -\underline{\xi} S_2 + C_2; \underline{\xi} S_2 + C_2; -\underline{\xi} S_3 + C_3; \underline{\xi} S_3 + C_3\}^T \quad (\text{A6-12})$$

$$S_1 \equiv \sin(k_1 \Delta x); S_2 \equiv \sin(k_2 \Delta y); S_3 \equiv \sin(k_3 \Delta \tau)$$

$$C_1 \equiv \cos(k_1 \Delta x); C_2 \equiv \cos(k_2 \Delta y); C_3 \equiv \cos(k_3 \Delta \tau)$$

$$S_i^2 + C_i^2 = 1; \quad i=1,2,3 \quad (\text{A6-13})$$

Aus (A6-9) folgt damit eine Gleichung für die Variation der Amplitude \underline{U} mit dem Zeitschritt n :

$$\underline{U_{i,j,k}^{n+1}} = \underline{A1} \cdot \underline{E} \underline{U_{i,j,k}^n} + \underline{A2} \cdot \underline{E} \underline{U_{i,j,k}^{n-1}} \quad (\text{A6-14})$$

Gemäß Richtmyer [111] läßt sich die Variation der Amplituden von einem zum nächsten Zeitschritt n beschreiben durch

$$\begin{pmatrix} U_{i,j,k}^{n+1} \\ U_{i,j,k}^n \end{pmatrix} = \underline{\underline{G}} \begin{pmatrix} U_{i,j,k}^n \\ U_{i,j,k}^{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A6-15})$$

mit der Verstärkungsmatrix

$$\begin{aligned} \underline{\underline{G}} &\equiv \begin{pmatrix} \underline{A1} \cdot \underline{E} & \underline{A2} \cdot \underline{E} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\equiv \begin{pmatrix} 2(A_{11} + i B_{11}) & A_{12} + i B_{12} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A6-16})$$

Die reellen Koeffizienten A_{11} , B_{11} , A_{12} , B_{12} sind für die verschiedenen Formel-Typen in Tabelle 9 zusammengestellt.

Die Eigenwerte dieser Verstärkungsmatrix $\underline{\underline{G}}$ sind

$$\lambda_{1,2} = A_{11} + i B_{11} \pm \sqrt{(A_{11} + i B_{11})^2 + A_{12} + i B_{12}} \quad (\text{A6-17})$$

Das Stabilitätskriterium ergibt sich nun gemäß von Neumann [110,111] aus der Forderung, daß die Amplituden der Störungen U^n der Lösung mit wachsendem Zeitschritt n nicht größer werden dürfen. Hieraus folgt als notwendige Bedingung

$$|\lambda_i| \leq 1 \quad i=1,2 \quad (\text{A6-18})$$

Diese Bedingung ist zudem hinreichend, wenn $\underline{\underline{G}}$ gleich seiner hermitisch konjugierten ist [110], was in der Regel angenommen wird [110, 111, 73, 140].

Analog zur Forderung (A6-18) ist selbstverständlich

$$|\lambda_{1/2}^2| \leq 1 \quad (\text{A6-19})$$

mit

$$|a + i b| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ; \quad a, b \text{ reell} \quad (\text{A6-20})$$

Hieraus kann der maximal zulässige Zeitschritt Δt bestimmt werden, wie in den folgenden Abschnitten für die einzelnen Differenzenformeltypen erläutert wird.

A6.1.3 Ergebnisse für den zulässigen Zeitschritt Δt

A6.1.3.1 Differenzenformel Typ a (Bocksprung, verzögerte Diffusion):

In explizierter algebraischer Weise kann der zulässige Zeitschritt nur für die extremen Fälle vernachlässigbarer Diffusion bzw. vernachlässigbarer Konvektion angegeben werden:

Fall a) reine Konvektion ($\mu = 0, \gamma \neq 0$)

Die Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ haben hier die Werte

$$\lambda_{1,2} = -i \Delta t \left(\frac{V_x}{\Delta x} S_1 + \frac{V_y}{\tau \Delta y} S_2 + \frac{V_z}{\Delta z} S_3 \right) \pm \sqrt{1 - \Delta t^2 \left(\frac{V_x}{\Delta x} S_1 + \frac{V_y}{\tau \Delta y} S_2 + \frac{V_z}{\Delta z} S_3 \right)^2}$$

Aus $|\lambda_{1,2}| \leq 1$ folgt:

$$\Delta t^2 \left(\frac{V_x}{\Delta x} S_1 + \frac{V_y}{\tau \Delta y} S_2 + \frac{V_z}{\Delta z} S_3 \right)^2 \leq 1$$

Das minimale Δt_K ergibt sich heraus für

$$S_1 = \text{sign}(V_x), S_2 = \text{sign}(V_y), S_3 = \text{sign}(V_z)$$

zu

$$\Delta t_K \leq \left(\frac{|V_x|}{\Delta x} + \frac{|V_y|}{\tau \Delta y} + \frac{|V_z|}{\Delta z} \right)^{-1} \quad (\text{A6-21})$$

Fall b) reine Diffusion ($V_x = V_y = V_z = 0, r \geq \Delta r$)

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{1 + 2\mu \Delta t \left[\frac{2}{\Delta x^2} (C_1 - 1) + \frac{2}{\tau^2 \Delta y^2} (C_2 - 1) + \frac{2}{\Delta z^2} (C_3 - 1) - \frac{1}{\tau^2} (\delta_y v_y + \delta_y v_z) + \frac{2S_3 k}{\tau \Delta z} \right]}$$

Die Beträge dieser Eigenwerte nehmen ihr Maximum für $C_1 = C_2 = C_3 = -1, S_3 = 0$ an und als zulässiger Zeitschritt ergibt sich:

$$\Delta t_D \leq \frac{1}{4\mu} \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\tau^2 \Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} - \frac{\delta_y v_y + \delta_y v_z}{2\tau^2} \right]^{-1} \quad (\text{A6-22})$$

Fall c) beliebige Parameterwerte

Für den allgemeinen Fall muß der zulässige Zeitschritt Δt numerisch ermittelt werden. Hierbei werden mittels eines Optimierungsprogrammes, das nach der Evolutionsstrategie arbeitet [60], die unabhängigen Variablen $C_1, C_2, C_3, I_1, I_2, I_3, I_4$ mit

$$-1 \leq C_i \leq 1, S_i = I_i \sqrt{1 - C_i^2}, i = 1, 2, 3$$

$$I_i \in \{-1, +1\}, i = 1, 2, 3, 4$$

(I_4 ist das Vorzeichen vor der Wurzel in (A6-17)) so variiert, daß eine Zielfunktion ZF minimiert wird. ZF liefert durch Intervall-Schachtelung mit einer

relativen Genauigkeit von 10^{-4} dasjenige $\Delta t \geq 0$ für das bei den oben gegebenen Variablen gilt

$$|\lambda(\Delta t)| \leq 1, \quad |\lambda(\Delta t + \varepsilon)| > 1.$$

Das numerisch ermittelte zulässige Δt ist eine Funktion von 10 Parametern:

$$\Delta t = \Delta t(\mu, V_x, V_y, V_z, \Delta x, \tau \Delta y, \Delta \tau, \tau, \sigma_{y0}, \sigma_{z0}) \quad (A6-23)$$

Abb.12 zeigt ein numerisches Ergebnis für

$$\Delta t = \Delta t(\mu, V_x, V_x/10, V_x/10, 0.125, 0.05, 0.05, 10^{10}, 0, 0) \quad (A6-24)$$

dargestellt als Funktion der Zähigkeit μ für drei Werte der Konvektionsgeschwindigkeit $V_x = 10, 30, 50$. Zum Vergleich sind eingezeichnet:

$$\Delta t_1 = \min \left\{ \Delta t(0, V_x, V_x/10, V_x/10, 0.125, 0.05, 0.05, 10^{10}, 0, 0), \right. \\ \left. \Delta t(\mu, 0, 0, 0, 0.125, 0.05, 0.05, 10^{10}, 0, 0) \right\} \quad (A6-25)$$

sowie:

$$\Delta t_2 = \Delta t \left(\mu + \frac{\frac{|V_x|}{\Delta x} + \frac{|V_y|}{\tau \Delta y} + \frac{|V_z|}{\Delta \tau}}{4 \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{(\tau \Delta y)^2} + \frac{1}{\Delta \tau^2} - \frac{\sigma_{y0} + \sigma_{z0}}{2\tau^2} \right)}, 0, 0, 0, 0.125, 0.05, 0.05, 10^{10}, 0, 0 \right). \quad (A6-26)$$

Δt_1 ist das Minimum der für reine Konvektion (Δt_K) bzw. reine Diffusion (Δt_D) sich ergebenden zulässigen Zeitschritte; Δt_2 ist die für reine Diffusion sich ergebende Asymptote mit einer so vergrößerten Zähigkeit, daß Δt_2 für $\mu=0$ den gleichen Wert annimmt wie Δt_K . Diese Vergleichswerte sind gemäß (A6-21,22) algebraisch berechenbar.

Man erkennt aus Abb.12:

- Der zulässige Zeitschritt sinkt mit wachsender Zähigkeit μ und wachsender Konvektionsgeschwindigkeit V_x .
- Der zulässige Zeitschritt Δt ist kleiner als die Werte Δt_K , Δt_D für die oben betrachteten Grenzfälle a und b.
- Eine konservative Annahme für den zulässigen Zeitschritt Δt ist die Funktion Δt_2 .

Die praktischen Rechnungen werden daher mit einem durch Δt_2 bestimmten Zeitschritt durchgeführt; als zusätzlicher Sicherheitsfaktor wird er jeweils um einen per Eingabe gesteuerten Faktor verkleinert, der typischerweise den Wert 0.5 hat.

A6.1.3.2 Differenzenformel Typ b (Euler-Verfahren, "upwind" Differenzen)

Für dieses Einschrittverfahren reduziert sich die Verstärkungsmatrix \underline{G} auf einen skalaren Wert; der Eigenwert lautet:

$$\lambda = \Delta t \left[(C_1 - 1) \left(\frac{|V_x|}{\Delta x} + \frac{2\mu}{\Delta x^2} \right) + (C_2 - 1) \left(\frac{|V_y|}{\tau \Delta y} + \frac{2\mu}{\tau^2 \Delta y^2} \right) + (C_3 - 1) \left(\frac{|V_z|}{\Delta z} + \frac{2\mu}{\Delta z^2} \right) - \frac{V_x}{\tau} \delta y_{up} - \frac{\mu}{\tau^2} (\delta y_{up} + \delta y_{down}) - S_1 \frac{V_x}{\Delta x} - S_2 \frac{V_y}{\tau \Delta y} - S_3 \frac{V_z}{\Delta z} \left(\frac{V_x}{\Delta x} + \frac{2\mu}{\tau \Delta x} \right) \right]$$

Der Betrag des Eigenwertes nimmt für $\tau \geq \Delta \tau$ sein Maximum für $C_1 = C_2 = C_3 = -1$;

$S_1 = S_2 = S_3 = 0$ an. Der zulässige Zeitschritt folgt hieraus zu:

$$\Delta t \leq \left[\frac{|V_x|}{\Delta} + \frac{|V_y|}{\tau \Delta y} + \frac{|V_z|}{\Delta z} + \frac{V_x}{2\tau} \delta y_{up} + 2\mu \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\tau^2 \Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} + \frac{\delta y_{up} + \delta y_{down}}{4\tau^2} \right) \right]^{-1} \quad (A6-27)$$

Dieses Ergebnis wurde auf anderem Wege auch von Krause [73,74] abgeleitet.

Abb.13 zeigt Δt als Funktion von μ für die gleichen Parameterwerte wie in (A6-24). Die zum Vergleich mit eingezeichneten Funktionen Δt_1 , Δt_2 gemäß (A6-25,26) machen deutlich, daß für diese Differenzenformeln im Vergleich zu Typ a bei reiner Konvektion der zulässige Zeitschritt Δt den gleichen und für reine Diffusion einen doppelt so großen Wert annehmen kann. Ein Zeitschritt gemäß (A6-26) ist also auch hier, d.h. für die Integration der Energiegleichung (5-100), konservativ.

A6.1.3.3 Differenzenverfahren Typ c (Bocksprung-Verfahren, mit Du-Fort-Frankel für die Diffusionsterme)

Hier ist ebenso wie bei Typ a der zulässige Zeitschritt Δt für den allgemeinen Fall nicht explizit algebraisch angebar. Für reine Konvektion ergibt sich der gleiche zulässige Zeitschritt Δt_K wie bei Typ a gemäß (A6-21). Für reine Diffusion ($V_x = V_y = V_z = 0$, $\tau = \infty$) nehmen die Beträge der Eigenwerte ihr Maximum an für $C_1 = C_2 = C_3 \in \{-1, +1\}$; $S_1 = S_2 = S_3 = 0$ zu :

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= 1 \\ |\lambda_2| &= \frac{1 - 2\mu \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\tau^2 \Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)}{1 + 2\mu \Delta t \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\tau^2 \Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)} < 1 \quad \text{für } \Delta t > 0. \end{aligned} \quad (A6-28)$$

D.h. bei reiner Diffusion sind die Differenzenformeln nach Du Fort Frankel stets stabil (dies Ergebnis entspricht in Verallgemeinerung auf drei Dimensionen den Angaben in [111]).

Für den allgemeinen Fall gleichzeitiger Konvektion und Diffusion muß der zulässige Zeitschritt, wie in Kap. 6.1.3.1 beschrieben, numerisch bestimmt werden. Abb. 14 zeigt das berechnete Ergebnis für die (A6-24) entsprechenden Parameterwerte; zum Vergleich wurden auch hier die Funktionen Δt_1 , Δt_2 (A6-25, 26) mit eingezeichnet. Man erkennt hieraus das erstaunliche Ergebnis, daß bei positiven Zähigkeiten μ (die nicht zu groß sind) der zulässige Zeitschritt Δt hier wesentlich (etwa um den Faktor 1/2 bis 1/3) kleiner ist als bei den Differenzenformeln Typ a. Für kleine Zähigkeiten μ wird sogar die sonst konservative Funktion Δt_2 unterschritten. Man würde eigentlich erwarten, daß Δt für reine Konvektion sein Minimum annimmt, wie z.B. in [112] angenommen wird. Wie Abb. 15 zeigt, wird dieser Grenzwert erst bei Zähigkeiten μ überschritten, die groß sind gegenüber μ_0 :

$$\mu_0 = \left(\frac{|V_x|}{\Delta x} + \frac{|V_y|}{\tau \Delta y} + \frac{|V_z|}{\Delta r} \right) \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\tau^2 \Delta y^2} + \frac{1}{\Delta r^2} \right)^{-1} \quad (\text{A6-29})$$

In dieser Arbeit ist jedoch die Zähigkeit μ klein und also das Du Fort-Frankel-Verfahren ungeeignet.

Im folgenden wird gezeigt, daß diese Aussage direkt mit der Dreidimensionalität verbunden ist, denn es kann bewiesen werden, daß im eindimensionalen Fall $\left(\frac{1}{\Delta r} = \frac{1}{\tau \Delta y} = \infty, \tau = \infty \right)$ tatsächlich Δt sein Minimum für $\mu=0$ annimmt.

Im eindimensionalen Fall lauten die Eigenwerte der Matrix \underline{G} :

$$\lambda_{1,2} = \frac{AC_1 - iBS_1 \pm \sqrt{(AC_1 - iBS_1)^2 + 1 - A^2}}{1+A}$$

mit
$$A \equiv \frac{2 \Delta t \mu}{\Delta x^2} \geq 0, \quad B \equiv \frac{\Delta t \cdot |V_x|}{\Delta x} \geq 0$$

Da gezeigt werden soll, daß $\Delta t = \frac{\Delta x}{|V_x|}$ zulässig ist, wird $B=1$ gesetzt. Der Ausdruck unter dem Wurzeloperator kann umgeformt werden:

$$(AC_1 - iS_1)^2 + 1 - A^2 = A^2(C_1^2 - 1) + 1 - S_1^2 - i2S_1C_1$$

Wegen (A6-13) folgt:

$$(AC_1 - iS_1)^2 + 1 - A^2 = (C_1 - iAS_1)^2$$

Die Wurzel kann hiervon also formal gezogen werden und die Eigenwerte haben für $B=1$ folgende Werte:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= C_1 - iS_1 \\ \lambda_2 &= \frac{1-A}{1+A} (C_1 + iS_1) \end{aligned}$$

$$|\lambda_1| = \sqrt{C_1^2 + S_1^2} = 1$$

$$|\lambda_2| = \frac{1-A}{1+A} \sqrt{C_1^2 + S_1^2} = \frac{1-A}{1+A} \leq 1 \quad (\text{A6-30})$$

Hier ist also $B = 1$ zulässig, d.h. $\Delta t = \Delta x / |V_x|$ ist ein zulässiger Zeitschritt bei beliebiger Zähigkeit $\mu \geq 0$.

Im zweidimensionalen Fall lauten die Eigenwerte:

$$\lambda_{1,2} = \frac{A_1 C_1 + A_2 C_2 - \frac{1}{2}(B_1 S_1 + B_2 S_2) \pm \sqrt{[A_1 C_1 + A_2 C_2 - \frac{1}{2}(B_1 S_1 + B_2 S_2)]^2 + 1 - A^2}}{1 + A}$$

mit

$$A_1 \equiv \frac{2 \Delta t \mu}{\Delta x^2} \quad A_2 \equiv \frac{2 \Delta t \mu}{\Delta \tau^2} \quad A \equiv A_1 + A_2$$

$$B_1 \equiv \frac{\Delta t \cdot |V_x|}{\Delta x} \quad B_2 \equiv \frac{\Delta t \cdot |V_y|}{\Delta \tau} \quad B \equiv B_1 + B_2$$

Soll auch hier der für reine Konvektion zulässige Zeitschritt $\Delta t = \left[\frac{|V_x|}{\Delta x} + \frac{|V_y|}{\Delta \tau} \right]^{-1}$ zulässig sein, so muß $B=1$ sein. Im Gegensatz zum eindimensionalen Fall kann der Ausdruck unter dem Wurzeloperator nicht in eine quadratische Form überführt werden und also nicht bewiesen werden, daß $|\lambda_{1,2}| \leq 1$ ist. Nun ist dies noch kein Beweis dafür, daß $|\lambda_{1,2}| > 1$ ist und folglich obiger Zeitschritt zu groß. Dies findet man jedoch numerisch. Wird z.B. $A_1=1/2$, $A_2=2$, $B_1=0.7$, $B_2=0.3$ angenommen, so ergibt sich der maximale Betrag des Eigenwertes für $C_1 \approx 0.4$, $C_2 \approx 0.9$ zu $|\lambda| = 1.0875$. Durch dieses Beispiel ist bewiesen, daß die Bedingung $|\lambda| \leq 1$ für $\Delta t = [|V_x|/\Delta x + |V_y|/\Delta \tau]^{-1}$ im zweidimensionalen Fall nicht stets eingehalten wird; folglich ist dieser Zeitschritt nicht das Minimum des für beliebige Zähigkeiten μ zulässigen Zeitschrittes.

Für die Simulation dreidimensionaler turbulenter Strömungen kann wegen der dabei vorliegenden kleinen Zähigkeiten also die Du Fort-Frankel-Methode nicht empfohlen werden.

A6.2. Über die heuristische nichtlineare Stabilitätsanalyse nach Hirt.

Hirt [57] hat in heuristischer Weise gezeigt, daß nichtlineare Instabilitäten auf Abbruchfehlern der nichtlinearen Terme beruhen, die aus Produkten der Form

$$a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

bestehen. Der Faktor $a(x)$ ist eine Funktion der Geschwindigkeiten und des Maschennetzes; vergleiche als Beispiel (A5-7). D.h. die Abbruchfehler erscheinen

wie zusätzliche Diffusionsterme mit variablen Zähigkeiten $a(x)$. Wenn $a(x)$ eine hinreichend glatte Funktion ist, kann sie linearisiert werden und hierfür Stabilitätskriterien wie in A6.1. abgeleitet werden. Hierbei gelangt man zu Ergebnissen der Art

$$\mu > \alpha u^2/\Delta t ; \mu > \beta \Delta x^2 \partial u/\partial x \quad (A6-31)$$

wobei α, β Zahlenwerte sind. Von Hirt [57] wurden derartige Kriterien lediglich für zweidimensionale Einschritt-Verfahren abgeleitet. Im Rahmen dieser Arbeit wurde nun versucht, Stabilitätskriterien dieser Art für die nichtlinearen Terme auch für die verwendeten dreidimensionalen Zweischritt-Differenzenformeln abzuleiten. Hierbei traten folgende Probleme auf:

- a) Die Abbruchfehler sind unterschiedlich je nachdem, ob als Bezugspunkt der Taylor-Reihen-Entwicklung der zentrale Ortspunkt beim Zeitschritt n_0 oder beim Zeitschritt n_1 (gemäß Kap.6.2.1) gewählt wird. Welches der "richtige" Bezugspunkt ist, konnte wegen der fehlenden exakten Theorie nicht entschieden werden.
- b) Die sich ergebenden Faktoren $a(x)$ sind dermaßen komplex, daß hieraus keine praktisch anwendbaren Stabilitätskriterien abgeleitet werden konnten.

Aus diesen Gründen wurde diese Stabilitätsanalyse nicht weiter verfolgt, sondern lediglich die aus der linearisierten Theorie sich ergebenden Kriterien mit zusätzlichen Sicherheitsfaktoren gemäß Kap.A6.1.3.1 benutzt.

A n h a n g 7

Berücksichtigung ungleichseitiger Maschen im Quellterm der Feinstruktur-Energiegleichung

Nach Abschluß der in den Kapiteln 1-8 dargestellten Theorie ergaben die ersten Testrechnungen mit stark ungleichseitigen Maschen

$$\Delta x_1 \gg \Delta x_2 \gg \Delta x_3 \quad (A7-1)$$

Geschwindigkeitsfelder, die nicht die erwartete randome Struktur aufwiesen, sondern ausgeprägt regelmäßig waren. Dies äußerte sich darin, daß die Geschwindigkeitsfelder lediglich als Funktion von x_1 mit langwelligen Schwingungen großer Amplituden variierten, während sie bezüglich x_2 und x_3 nahezu konstante Werte annahmen, also:

$$\langle (\partial u / \partial x_1)^2 \rangle \gg \langle (\partial u / \partial x_2)^2 \rangle \approx \langle (\partial u / \partial x_3)^2 \rangle. \quad (A7-2)$$

Es wurde festgestellt, daß dieser Effekt mit der Ungleichheit der Maschenkanten und deren Auswirkungen auf die Energiegleichung erklärt und daher entsprechend beseitigt werden kann:

Der Quellterm P in (5-44) ist proportional zu einer Differenzenform des Deformationsgeschwindigkeitsquadrates D_{ij}^2 , das aus 9 Summanden $(D_{i,j,j})^2$ besteht (wobei jedoch $(D_{i,j,j})^2 = (D_{j,j,i})^2$ gilt). Infolge der Ungleichheit der Maschenkanten sind die Summanden im zeitlichen Mittel unterschiedlich groß. Bei lokalisotroper Turbulenz mit Kolmogorov-Spektrum variiert $\langle (D_{i,j,j})^2 \rangle$ gemäß (A3-21) etwa proportional zu $\Delta x_i^{-2/3}$ bzw. $\Delta x_j^{-4/3}$. Bei dem Verhältnis (A7-1) der Maschenkanten ist also z.B. $\langle D_{11}^2 \rangle$ wesentlich kleiner als $\langle D_{33}^2 \rangle$. D.h. eine Variation des Geschwindigkeitsfeldes in der x_1 -Richtung liefert einen geringeren Beitrag zum Quellterm P als eine Variation in x_3 -Richtung. Folglich ist überall dort, wo zufällig ein großer Gradient $|\partial u / \partial x_3|$ auftritt, die Energie \overline{E} und damit die Zähigkeit μ groß. Dort wird das Geschwindigkeitsfeld schnell wieder geglättet. Dies ist dagegen nicht für Orte der Fall, wo $|\partial u / \partial x_1|$ groß ist, und also stellt sich das Ergebnis (A7-2) ein.

Zur Beseitigung dieses Effektes werden die einzelnen Summanden $(D_{i,j,j})^2$ mit den Gewichten

$$\frac{\langle D_{i,j}^2 \rangle}{\langle D_{i,j,j}^2 \rangle} \quad (A7-3)$$

multipliziert, die für lokalisotrope Turbulenz mit Kolmogorov-Spektrum mit Hilfe der in Anhang 2 angegebenen Programme berechnet werden können. Nach Multiplikation mit diesen Gewichten sind bei Einhaltung dieser Voraussetzungen also alle Summanden im zeitlichen Mittel gleich groß.

Mit dieser Korrektur (A7-3) nehmen die errechneten Geschwindigkeitsfelder die erwartete randome Struktur an, worüber in Kapitel 10 berichtet wird.

A n h a n g 8:

Programmtests für laminare Strömungen

A8.1 Anlaufströmung

Es wird die Anlaufströmung berechnet, die sich für konstante Zähigkeit ν (laminar) einstellt, wenn von der Zeit $t=0$ an, wo $u(t=0)=0$ ist, ein Druckgradient $P_x=2$ das Fluid in axialer Richtung beschleunigt. Die Lösungen des Differenzenverfahrens werden verglichen mit den mittels des Programms ANLAUF [36] aus Reihenentwicklungen berechneten "exakten" Lösungen. Die Rechnungen werden für einen Ringspalt mit

$$R1=0.25, \quad R2=1.25, \quad \nu = 1$$

durchgeführt. Dabei werden drei Fälle betrachtet:

Fall a) $\Delta t = 0.001, \quad \Delta r = 1/8 \quad (=const)$

Fall b) $\Delta t = 0.001,$

$$\Delta r = \{0.1, 0.1, 0.13, 0.17, 0.17, 0.13, 0.1, 0.1\}$$

Fall c) $\Delta t = 0.00025, \quad \Delta r = 1/16 \quad (=const)$

Tabelle 10 zeigt für verschiedene Zeiten t die Abweichungen ϵ zwischen der exakten und der Differenzenverfahren-Lösung. ϵ_1 sind die Abweichungen in der Masche an der inneren Wand (dort treten die größten Abweichungen auf) und ϵ_2 sind die Abweichungen bei $r = (R1+R2)/2$. Die Angaben erfolgen für $0 < t \leq 0.40$. Zur Zeit $t = 0.40$ beträgt die maximale Beschleunigung statt anfangs 2 nur noch 0.062 und damit ist die Lösung zu dieser Zeit der stationären schon recht nahe gekommen.

Man erkennt aus Tabelle 10, daß die Verwendung nichtäquidistanter Maschen lediglich bei sehr kleinen Zeiten in der Wandmasche eine geringfügige Verkleinerung des Fehlers liefert. Dies läßt immerhin die Möglichkeit zu, daß eine feinere Auflösung zur Darstellung der insbesondere in Wandnähe stark schwankenden turbulenten Felder vorteilhaft sein kann.

A8.2 Strömung zwischen rotierenden Zylindern

Als zweites laminares Testproblem wurde die stationäre Strömung zwischen zwei konzentrischen rotierenden Zylindern, die mit den verschiedenen Drehzahlen ω_1 (innen) und ω_2 (außen) umlaufen, betrachtet. Hierfür lautet die exakte Lösung [120]:

$$v_\varphi(r) = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left[r (\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2) - \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{r} (\omega_2 - \omega_1) \right]$$

Da diese Lösung unabhängig von der axialen Strömung ist, wurde sie gleichzeitig mit dem Problem gemäß A8.1 untersucht. Für $\omega_1 = \omega_2$ ist $v_p(r)$ eine lineare Funktion des Radius r , die sich auch numerisch exakt ergibt. Neben den azimuthalen Diffusionstermen wird mit diesem Beispiel zugleich die Druckberechnung getestet. Infolge der Zentrifugalbeschleunigung stellt sich die Druckverteilung

$$p(r) = \int_{R_1}^r v_p^2 / r \, dr + p_{w_1}$$

ein; für $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ gilt

$$p(r) = \frac{\omega^2}{2} [r^2 - R_1^2] + p_{w_1}$$

Diese Lösung wurde mit relativen Fehlern $< 1\%$ bei $KM=8$ Maschen in radialer Richtung vom Differenzenverfahren wiedergegeben.

A8.3 Zweidimensionaler Taylor-Green-Wirbel

Für die Anfangswerte

$$u_1^0 = -\cos(x_1) \cdot \sin(x_2) \quad ; \quad u_2^0 = \sin(x_1) \cos(x_2) \quad ; \quad u_3^0 = 0$$

existiert bei Abwesenheit aller Feldkräfte und periodischen Randbedingungen die exakte Lösung [94, 131, 102]:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^0 \cdot \exp(-2\nu t) \\ u_2 &= u_2^0 \cdot \exp(-2\nu t) \\ u_3 &= 0 \\ p &= -\frac{1}{4} [\cos(2x_1) + \cos(2x_2)] \cdot \exp(-2\nu t) \end{aligned}$$

Dieses Testproblem wurde auch von Orszag [94] und Chorin [21] benutzt.

Tabelle 11 zeigt die Fehler der Geschwindigkeitskomponenten für

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \pi/16 \quad ; \quad \nu = 0.05 \quad ; \quad \Delta t = 0.0648$$

Spalte I enthält die Fehler der numerischen Lösung, die mit dem hier beschriebenen Differenzenverfahren berechnet wurde. Spalte II sind die von Orszag für das gleiche Problem berichteten Fehler. Die Fehler der von Chorin verwendeten Methode lagen um mehrere Zehnerpotenzen über denen von Orszag. Spalte III gibt an, um welchen Faktor die Fehler durch Vervielfachung der Maschenweiten anwachsen. Die Tabelle 11 zeigt, daß das hier verwendete Verfahren bei kleinen

Zeiten wesentlich genauer ist als das von Orszag verwendete. Der Grund hierfür liegt in der impliziten Berechnung des Druckes p zum Zeitpunkt n^2 gemäß (6-4). Bei einer Genauigkeit der Ordnung Δx^2 sollte bei Vervierfachung von Δx der Fehler theoretisch um den Faktor 16 anwachsen; dies wird durch Spalte III der Tabelle 11 für das vorliegende Differenzenverfahren etwa bestätigt.

Verzeichnis häufig verwendeter Symbole

1) Allgemeine Kennzeichnung einer beliebigen Größe y

$\langle y \rangle$	zeitlicher oder über Ensemble gebildeter Mittelwert
\bar{y}	Mittelwert über ein begrenztes räumliches Volumen
y'	Abweichung vom jeweiligen Mittelwert
$\bar{\langle y \rangle}$	Mittelwert über das gesamte Strömungsvolumen
$\bar{\langle y \rangle}^P$	Mittelwert über die Ebenen mit periodischen Randbedingungen ($x_1-x_2; x-\varphi$); "Periodenmittelwert"
y''	Abweichung vom Periodenmittelwert
\bar{y}^V	Mittelwert über ein Maschenvolumen
\bar{y}^i	Mittelwert über eine Maschenfläche deren Normale zur x_1 -Koordinate parallel ist ("i-Fläche")
$\bar{y}^x, \bar{y}^\varphi, \bar{y}^r$	Mittelwert über die x-, φ - bzw. r-Fläche einer Masche
\bar{y}^i	arithmetischer Mittelwert über in x_i -Richtung benachbarte Werte im Maschennetz (gleiche Gewichte)
$\bar{y}^x, \bar{y}^\varphi, \bar{y}^r$	wie \bar{y}^i für x-, φ -, r-Richtung
$\bar{y}^i, \bar{y}^x, \bar{y}^\varphi, \bar{y}^r$	wie $\bar{y}^i, \bar{y}^x, \bar{y}^\varphi, \bar{y}^r$ mit ungleichen Gewichten zur Berücksichtigung nichtäquidistanter Maschen gemäß (6-1)
$\frac{\partial y}{\partial x}$	partielle Ableitung von y nach x
$\delta_x y$	zentraler Differenzenquotient von y: $\frac{y(x+\frac{\Delta x}{2}) - y(x-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$
$\bar{\delta}_x y$	Differenzenquotient gemäß (6-2)
$\delta_x^* y$	Differenzenquotient gemäß (6-20)

y_i	(in der Regel) Komponente in x_i -Richtung ($i=1,2,3$)
y_x, y_φ, y_r	Komponenten in x -, φ -, r -Richtung
\underline{y}	Vektor
$\underline{\underline{y}}$	Matrix
y_m	Mittelwert
y_{max}	Maximalwert
y_{min}	Minimalwert
y_w	Wandwert
\tilde{y}	(bei Geschwindigkeiten:) Geschwindigkeitswert zum neuen Zeitschritt bei Vernachlässigung des Druckes
\hat{y}	dimensionsbehaftete Größe
y_0	Bezugsgröße

2) Summationskonvention

Über paarweise unten rechts stehende, unbestimmte Indices wird von 1 bis 3 summiert:

$$y_{ii} = \sum_{i=1}^3 y_{ii} \quad ; \quad y_i^2 = \sum_{i=1}^3 y_i^2$$

Hierbei nehmen die an anderer Stelle (oben links oder oben rechts) stehenden gleichnamigen Indices jeweils entsprechende Werte an.

Über unten rechts stehende Indices wird nicht summiert, wenn diese in eckigen Klammern stehen:

$$y_{[i][i]} \neq \sum_{i=1}^3 y_{ii}$$

3) Symbole

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$	Turbulenz-Modell-Konstanten (Kap.2)
A_w	Konstanten in (2-8)
$c_1, c_2, \dots, c_{11}, c_v$	Feinstruktur-Modell-Konstanten (Kap.5)
d_1, d_2, \dots, d_5	(A2 - 32)
D	Wandabstand
$D_{ij} =$	$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ Deformationsgeschwindigkeit
\bar{R}^{D^2}	zeitliche Mittelwerte von Differenzenformen des Deformationsgeschwindigkeitsquadrates gemäß (4-23 bis 26)
D^2	unbestimmte Form von ${}_k D^2$
$D1, D2, \dots, D5$	Fortran-Programme gemäß Anhang 2
$D1N, D2N, \dots, D5N$	Fortran-Programme gemäß Anhang 2
$D11, \dots, D14$	Fortran-Programme gemäß Anhang 2
\underline{e}_i	Einheitsvektor in x_i -Richtung
E	kinetische Energie
$\overline{v_E'}$	kinetische Energie der Schwankungsbewegung innerhalb einer Masche
$E(R)$	dreidimensionales, mittleres, skalares Energiespektrum (Anhang 1)
$E_1(R_1)$	eindimensionales Energiespektrum (Anhang 1)

$E_{ij}(\underline{k})$	tensorielles Energiespektrum (Anhang 1)
$E_{11}(k_1)$	$= E_{11}(k_1 \cdot \underline{e}_1)$
$E_{22}(k_1)$	$= E_{22}(k_1 \cdot \underline{e}_1)$
$E_{33}(k_1)$	$= E_{33}(k_1 \cdot \underline{e}_1)$
E_2, E_3, E_n	Funktion gemäß Kap.A2.2
E_1, E_2	Konstanten zur Berücksichtigung der Wandrauigkeiten in (7-8), E_1 für die Wand bei R_1 , E_2 für $r=R_2$
f_1, f_2, f_3	Faktoren gemäß (4-38-40)
F	Fläche
j_F	j-Fläche; Maschenfläche, deren Normale zur x_j -Koordinate parallel ist
$F(\tau)$	Längskorrelation (A1-5)
FED	(4 - 27)
$FED1$	Fortran-Programm gemäß Anhang 2
$G(\tau)$	Querkorrelation (A1-6)
$\underline{\underline{G}}$	Verstärkungsmatrix (A6-15)
h	mittlere Maschenkantenlänge (5-6)
h_1, h_2, h_3	relative Maschenkantenlängen $h_1 = \Delta x_1 / h$
H_1, H_2, H_3	Maschenkantenlängen
i	Index (oft bezüglich x_1 -Richtung)

$i = \sqrt{-1}$	imaginäre Einheit
IM	Anzahl der Maschen in x_1 -Richtung
j	Index (oft bezüglich x_2 -Richtung)
J	Anzahl der Maschen in x_2 -Richtung
k	Index (oft bezüglich x_3 -Richtung)
k	skalare Wellenzahl
k_1	skalare Wellenzahl bezüglich x_1 -Richtung
\underline{k}	Wellenzahlenvektor
k	Karman-Konstante (0.4)
k_p	Rotta-Konstante (A1-48)
$K(\underline{1})$	Gewichtsfunktion (4-13)
KM	Anzahl der Maschen in x_3 -Richtung
m	Index bezüglich x_1 -Richtung
ℓ	Turbulenzballendurchmesser
L	Korrelationslänge (2-5, 6,7)
L_{iso}	Durchmesser des Bereiches mit Lokalisotropie (Kap.4.1)
m	Index bezüglich x_2 -Richtung
n	Index bezüglich x_3 -Richtung oder zur Kennzeichnung des Zeitschrittes

n_0, n_1, n_2	verschiedene Zeitschritte des Differenzenverfahrens; siehe Kap.6.2.1
N	Anzahl der Zeitschritte nach denen gem.Kap.6.2.1 eine Mittelung vorgenommen wird
p	Druck
P_x	axialer mittlerer Druckgradient
r	Radiuskoordinate
Re	Reynoldszahl (1-13)
Re_m	Reynoldszahl (1-14)
R_1	Radius des inneren Zylinders
R_2	Radius des äußeren Zylinders
R_n	Restglied
R_{ij}	Zwei-Punkt-Korrelation (A1-1) zwischen Geschwindigkeits- schwankungen
R_{ψ_1, ψ_2}	Zwei-Punkt-Korrelation zwischen beliebigen Größen
s	Koordinate
t	Zeit
u	axiale Geschwindigkeitskomponente (Abb.1)
\underline{u}	Geschwindigkeitsvektor
u_1, u_2, u_3	vergl. Abb.1
v_x, v_y, v_z	vergl. Abb.1
v	azimutale Geschwindigkeitskomponente (Abb.1)
V	ein Volumen

w	radiale Geschwindigkeitskomponente (Abb.1)
\underline{x}	Ortsvektor
x_1, x_2, x_3	Ortsvektor (Abb.1)
x	axiale Koordinate (Abb.1)
X_1, X_2	Periodenlängen in x_1 -bzw. x_2 -Richtung bei Platte
X	Periodenlänge in x -Richtung bei Ringspalt
y	azimutale Koordinate (Abb.1)
y	eine unbestimmte Größe
z	radiale Koordinate (Abb.1)
α	Kolmogorov-Konstante (4-4)
δ_{ij}	Kronecker-Delta
Δ	Intervall
Γ	Gamma-Funktion
ε	Dissipation (1-16)
η	Kolmogorov-Länge (A1-33)
ϑ	Dirac-Function
λ	Eigenwert
μ	turbulente Zähigkeit der Feinstruktur
$\overset{i}{\mu}$	lokalisotroper Anteil der Feinstruktur-Zähigkeit
$\overset{p}{\mu}$	inhomogener Anteil der Feinstruktur-Zähigkeit
μ^+	$= \mu + \nu$
ν	kinematische molekulare Zähigkeit
$\underline{\xi}$	Verschiebungsvektor

ϱ	Dichte
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Korrekturfaktoren (5-14,15, 5-82)
τ	Integrationsvariable
φ	Volumenkorrelation (4-20)
ϕ	Periodenlänge in azimuthaler Richtung beim Ringspalt
ψ	Hilfspotential (Kap.6.2.2)
ψ_1, ψ_2	unbestimmte turbulente Felder (Kap.4.2)
ω	Rotationsgeschwindigkeit, Rotation

Literatur

- / 1/ Arakawa, A.: Computational Design for Long-Term Numerical Integration of the Equations of Fluid Motion. J. Comp. Phys. 1 (1966), S. 116 - 143
- / 2/ Aziz, K.; Hellums, J. D.: Numerical Solution of the Three-Dimensional Equations of Motion for Laminar Natural Convection. Phys. Fluids 10 (1967), S. 314 - 324
- / 3/ Amsden, A. A.; Harlow, F. H.: The SMAC Method: A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows. LA-4370 (1970)
- / 4/ Arndt, R. E. A.; Nilsen, A. W.: On the Measurement of Fluctuating Pressure in the Mixing Zone of a Round Jet. ASME: Fluid Dynamic Measurement (1971), Paper 71-FE-31
- / 5/ Boussinesq, J.: Theorie de l'écoulement tourbillant. Mém. prés. Acad. Sci. XXIII, 46, Paris (1877)
- / 6/ Batchelor, G. K.: The Theory of Homogeneous Turbulence. Cambridge University Press (1953)
- / 7/ Brown, C. E.: Basic Concepts. Chapter 68 in Flügge, W.: Handbook of Engineering Mechanics. McGraw Hill, New York (1962)
- / 8/ Buleev, N. I.: Theoretical Model for Turbulent Transfer in Three-Dimensional Fluid Flow. 3. U. N. Int. Conf. on the Peaceful Use of Atomic Energy, A/Conf. 28/P/329 (May 1964)
- / 9/ Bracewell, R.: The Fourier Transform and its Applications. McGraw Hill, New York (1965), pp. 381
- /10/ Bryan, K.: A Scheme for Numerical Integration of the Equations of Motion on an Irregular Grid free of Non-linear Instability. Monthly Weather Rev. 94 (1966), S. 39 - 40
- /11/ Barthels, H.: Darstellung des Wärmeüberganges in konzentrischen Ringspalten unter Benutzung der Analogie zwischen Impuls- und Wärmeaustausch. Jül-506-RB (1967)
- /12/ Beran, M. J.: Statistical Continuum Theories. Interscience Publ. (1968)
- /13/ Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.: Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch, Zürich (1968)
- /14/ Brenner, N.: Cooley-Tukey Fast Fourier Transform - FOUR2. IBM Contributed Program Library. Progr. Ord. No. 360 D - 13.4.003 (1969)

- /15/ Bourke, P. J. et al.: A Study of the Spatial Structure of Turbulent Flow by Intensity-Fluctuation Spectroscopy. J. Phys. A: Gen. Phys. 3 (1970), S. 216 - 228
- /16/ Birkhoff, G.: The Numerical Solution of Elliptic Equations. Regional Conf. Ser. in Appl. Mathm. 1 (1971)
- /17/ Boston, N. E. J.; Burling, R. W.: An Investigation of High-Wavenumber Temperature and Velocity Spectra in Air. J. Fluid Mech. 55 (1972), S. 473 - 492
- /18/ Comte-Bellot, G.: Écoulement Turbulent Entre Deux Parois Parallèles. Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air No. 419 (1965), pp. 159
- /19/ Cooley, J. W.; Tukey, J. W.: An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. Math. Comput. 19 (1965), S. 297 - 301
- /20/ Cochran, W. T. et al.: What is the Fast Fourier Transform? Proc. IEEE 55 (1967), 1664 - 1674
- /21/ Chorin, A. J.: Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations. Math. Comp. 22 (1968), S. 745 - 762
- /22/ Clark, J. A.: A Study of Incompressible Turbulent Boundary Layers in Channel Flow. J. Basic Engng. (Transact. ASME) 90 (1968), S. 455 - 467
- /23/ Chorin, A. J.: On the Convergence of Discrete Approximations to the Navier-Stokes-Equations. Math. Comp. 23 (1969), S. 341 - 353
- /24/ Crastan, V.; Devos, J. E.: Finite Element Solution of the Three-Dimensional Flow Problem and of Reynold's Equation for Incompressible and Compressible Fluids. Nucl. Eng. Design 22 (1972), S. 225 - 232
- /25/ Van Driest, E. R.: On Turbulent Flow Near a Wall. J. Aeronaut. Sci. 23 (1956), 1007
- /26/ Deissler, R. G.: Weak Locally Homogeneous Turbulence in Idealized Flow Through a Cone. ZAMP 19 (1967), S. 165 - 183
- /27/ Deardorff, J. W.: Numerical Study of Heat Transfer by Internal Gravity Waves above a Growing Unstable Layer. Phys. Fluids Suppl. II, High-Speed Comp. in Fluid Dynamics (1969), S. II-184 - 194
- /28/ Deardorff, J. W.: A Three-Dimensional Numerical Study of Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers. NCAR Manuscript No. 69 - 19 (Jan. 1969)

- /29/ Deardorff, J. W.: A Numerical Study of Three-Dimensional Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers.
J. Fluid Mech. 41, (1970), S. 453 - 480
- /30/ Deardorff, J. W.: A Three-Dimensional Numerical Investigation of the Idealized Planetary Boundary Layer.
Geophys. Fluid Dynamics 1 (1970), S. 377 - 410
- /31/ Deardorff, J. W.: Lagrangian Statistics from Numerically Integrated Turbulent Shear Flow.
Phys. Fluids 13 (1970), S. 584 - 595
- /32/ Deardorff, J. W.: On the Magnitude of the Subgrid Scale Eddy Coefficient. J. Comp. Phys. 7 (1971), S. 120 - 133
- /33/ Deardorff, J. W.: Numerical Investigation of Neutral and Unstable Planetary Boundary Layers.
J. Atmosp. Sci. 29 (1972), S. 91 - 115
- /34/ Donaldson, C. du P.: Calculation of Turbulent Shear Flows for Atmospheric and Vortex Motion.
AIAA J. 10 (1972), S. 4 - 12
- /35/ Emmons, H. W.: Critique of Numerical Modeling of Fluid-Mechanics Phenomena.
Ann. Rev. Fluid Mechanics 2 (1970), S. 15 - 36
- /36/ Enderle, G.; Schumann, U.: FORTRAN Programme zur analytischen Beschreibung der Anlaufströmung in eindimensionalen Geometrien. KFK-Ext. 8/71-6 (1971)
- /37/ Easton, C. R.: Homogeneous Boundary Conditions for Pressure in the MAC Method.
J. Comp. Phys. 9 (1972), S. 375 - 379
- /38/ Eklundh, J. O.: A Fast Computer Method for Matrix Transposing. IEEE Transact. Computers (1972), S. 801 - 803
- /39/ Enderle, G.; Schlechtendahl, E. G.; Schumann, U.; Schuster, R.: Design Principles of the GRAPHIC-System.
KFK 1722 (1973)
- /40/ Fromm, J.: The Time Dependent Flow of an Incompressible Fluid. (B. Alder et al. ed.:)
Methods in Computational Physics 3 (1964), S. 346 - 382
- /41/ Fromm, J. E.: Numerical Method for Computing Nonlinear, Time Dependent Circulation of Air in Rooms.
IBM J. Res. Develop. 15 (1971), S. 186 - 196
- /42/ Fox, D. G.: Numerical Simulation of Three-Dimensional, Shape-Preserving Convective Elements.
J. Atmosp. Sci. 29 (1972), S. 322 - 341

- /43/ Fox, D. G.; Lilly, D. K.: Numerical Simulation of Turbulent Flows. Rev. Geophys. Space Phys. 10 (1972), S. 51 - 72
- /44/ Fox, D. G.; Deardorff, J. W.: Computer Methods for Simulation of Multidimensional, Nonlinear, Subsonic, Incompressible Flow. Transact. ASME, Journal of Heat Transfer 94, Ser. C. (1972), S. 337 - 346
- /45/ Göring, H.: Sammelband zur Statistischen Theorie der Turbulenz. Akademie-Verlag Berlin (1958)
- /46/ Grant, H. L.; Stewart, R. W.; Moilliet, A.: Turbulence Spectra from a Tidal Channel. J. Fluid Mech. 12 (1962), S. 241 - 268
- /47/ Gibson, M. M.: Spectra of Turbulence in a Round Jet. J. Fluid Mech. 15 (1963), S. 161
- /48/ Gröber; Erk; Grigull, U.: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer-Verlag, Berlin (1963)
- /49/ Gosman, A. D.; Pun, W. M.; Runchal, A. K.; Spalding, D. B.; Wolfshtein, M.: Heat and Mass Transfer in Recirculating Flows. Academic Press, London (1969)
- /50/ Günther, G.: Neuere Fortschritte bei der Fourier-Transformation. Elektronische Datenverarbeitung (1969), S. 275 - 280
- /51/ Gregorig, R.: Ausgebildete turbulente Rohrströmung für sehr große Reynoldszahlen - Das Prinzip von Hamilton. Wärme- und Stoffübertragung 5 (1972), S. 73 - 80
- /52/ Heisenberg, W.: Zur statistischen Theorie der Turbulenz. Z. Physik 124 (1948), S. 628 - 657
- /53/ Hinze, J. O.: Turbulence. McGraw-Hill, New York (1959), pp. 586
- /54/ Harlow, F. H.; Welch, J. E.: Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. Phys. Fluids 8 (1965), S. 2182 - 2189
- /55/ Hockney, R. W.: A Fast Direct Solution of Poisson's Equation Using Fourier Analysis. JACM 12 (1965), S. 95 - 113
- /56/ Hirt, C. W.; Harlow, F. H.: A General Corrective Procedure for the Numerical Solution of Initial-Value Problems. J. Comp. Physics 2 (1967), S. 114 - 119
- /57/ Hirt, C. W.: Heuristic Stability Theory for Finite-Difference Equations. J. Comp. Physics 2 (1968), S. 339 - 355

- /58/ Harlow, F. H.: Numerical methods for fluid dynamics;
an annotated bibliography. LA-4281 (1969)
- /59/ Harlow, F. H.; Hirt, C. W.: Generalized Transport
Theory of Anisotropic Turbulence. LA-4086 (1969)
- /60/ Heusener, G.: Optimierung natriumgekühlter schneller
Brutreaktoren mit Methoden der nichtlinearen Program-
mierung. KFK 1238 (1970)
- /61/ Hockney, R. W.: The Potential Calculation and Some Ap-
plications.
(Alder, et al. ed.): Methods in Comp. Physics 9,
Acad. Press (1970), S. 135 - 211
- /62/ Harlow, F. H.; Amsden, A. A.: A Numerical Fluid Dyna-
mics Calculation Method for All Flow Speeds.
J. Comp. Phys. 8 (1971), S. 197 - 213
- /63/ Hirt, C. W.; Cook, J. L.: Calculating Three-Dimensional
Flows around Structures and over Rough Terrain.
J. Comp. Phys. 10 (1972), S. 324 - 340
- /64/ Hinkelmann, K.: Stand und Möglichkeiten der numerischen
Wettervorhersage.
Annal. der Meteorol., Neue Folge Nr. 6 (1973), 11 - 23
- /65/ IBM: System /360 Scientific Subroutine Package, Program-
mer's Manual, IBM-Form H20-0205
- /66/ Kármán, T. von: The Fundamentals of the Statistical
Theory of Turbulence.
J. Aeron. Sci. (1937), S. 131 - 138
- /67/ Kolmogorov, A. N.: Die lokale Struktur der Turbulenz in
einer zähen kompressiblen Flüssigkeit.
C. R. Acad. Sci. U.S.S.R. 30 (1941), S. 301 (russisch)
deutsche Übersetzung in /44/, S. 71 - 76)
- /68/ Kolmogorov, A. N.: Equations of turbulent motion of an
incompressible fluid. Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Phys.
6 (1942), S. 56 - 58. Übersetzt ins Englische in:
Imperial College, Mech. Eng. Dept. Report No. ON/6, 1968
- /69/ Kraichnan, R. H.: Lagrangean History Closure Approxima-
tion for Turbulence. Phys. Fluids 8 (1965), S. 575 - 598
- /70/ Kraichnan, R. H.: Isotropic Turbulence and Inertial-
Range Structure in the Abridged LHD1 Approximation
Unveröffentlichter Research Report No. 8 (1966), Office
of Naval Research, Contrat No. 4307 (00), berichtet von
Lilly /81/
- /71/ Kolsky, H. G.: Some Computer Aspects of Meteorology.
IBM-Journal (1967), S. 584 - 600

- /72/ Kirsch, D.: The Solution of Heat Convection Problems by the Monte Carlo Method. KFK 1315 (1970)
- /73/ Krause, E.: Numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen zur Berechnung inkompressibler Zentrifugenströmungen
in: Krause, E.; Hirschel, E. H. (Hrsg.): Strömungsmechanische Vorgänge in Gaszentrifugen.
DFVLR, Institut für Gasdynamik, Porz-Wahn (1970), S. 93 - 119
- /74/ Krause, E.: Numerische Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible, achsensymmetrische Strömungen. ZAMM 51 (1971), T 156
- /75/ Kirsch, D.: Untersuchungen zur Strömungs- und Temperatur-Verteilung im Bereich lokaler Kühlkanalblockaden in Stab-bündel-Brennelementen.
Dissertation TU Karlsruhe (1973), KFK 1794
- /76/ Laufer, J.: Investigation of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Channel. NACA Report 1053 (1950)
- /77/ Laufer, J.: Some Recent Measurements in a Two-Dimensional Turbulent Channel.
J. Aeronautical Sci. (1950), S. 277 - 287
- /78/ Lilly, D. K.: Numerical Solutions for the Shape-Preserving Two-Dimensional Thermal Convection Element.
J. Atmosph. Sci. 21 (1964), S. 83 - 98
- /79/ Lilly, D. K.: On the Computational Stability of Numerical Solutions of Time-Dependent Non-Linear Geophysical Fluid Dynamics Problems.
Monthly Weath. Rev. 93 (1965), S. 11 - 26
- /80/ Lilly, D. K.: On the Application of the Eddy Viscosity Concept in the Inertial Sub-range of Turbulence.
NCAR Manuscript No. 123 (Jan. 1966)
- /81/ Lilly, D. K.: The Representation of Small-Scale Turbulence in Numerical Simulation Experiments. (Goldstine, H. H. ed.): Proc. of the IBM Scientific Computing Symposium on Environmental Sciences. (14.- 16. Nov. 1966, New York), IBM Form No. 320 - 1951 (1967), S. 195 - 210
- /82/ Leith, C. E.: Two-Dimensional Eddy Viscosity Coefficients. Proc. WMO-IUGG Symposium on Numerical Weather Prediction, Tokyo, Japan (1968), S. I-41 bis I-44
- /83/ Lilly, D. K.: Numerical Simulation of Developing and Decaying Two-Dimensional Turbulence.
J. Fluid Mech. 45 (1971), S. 395 - 415

- /84/ Leinemann, K.: Programme zur Darstellung von ebenen und räumlichen Vektorfeldern. KFK 1637 (1972)
- /85/ Lorenz, E. N.: Investigating the Predictability of Turbulent Motion. Lecture Notes in Physics, Statistical Models and Turbulence, Proc. Symp. San Diego, Springer-Verlag (1972), S. 195 - 204
- /86/ Navier, C. L. M. H.: Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. Mém.Acad. Sci 6 (1822), 389
- /87/ Miyakoda, K.: Contribution to the Numerical Weather Prediction - Computation with Finite Difference. Japanese J. Geophysics, Tokyo, Japan 3 (1962), S. 75 - 190
- /88/ Maubach, K.: Reibungsgesetze turbulenter Strömungen. Chemie-Ing.Techn. 42 (1970), S. 995 - 1003
- /89/ Mollo-Christensen, E.: Physics of Turbulent Flow. AIAA J. 9 (1971), S. 1217 - 1228
- /90/ Maubach, K.; Rehme, K.: Negative Eddy Diffusivities for Asymmetric Turbulent Velocities Profiles? Int. J. Heat Mass Transf. 15 (1972), S. 425 - 432
- /91/ Ng, K. H.; Spalding, D. B.: Turbulence Model for Boundary Layers near Walls. Phys. Fluids 15 (1972), S. 20 - 30
- /92/ Obuchow, A. M.: Über die Energieverteilung im Spektrum einer turbulenten Strömung. Deutsche Übersetzung in /44/, S. 83 - 96 (1941)
- /93/ Obuchow, A. M.; Jaglom, A. M.: Die Mikrostruktur einer turbulenten Strömung. Deutsche Übersetzung in /44/, S. 97 (1941)
- /94/ Orszag, S. A.: Numerical Methods for the Simulation of Turbulence. High-Speed Comput. Fluid Mech., Phys. Fluids Suppl II (1969), S. II-250 - II-257
- /95/ Orszag, S. A.: Numerical Simulation of Incompressible Flows Within Simple Boundaries. I. Galerkin (Spectral) Representations. Stud. Appl. Mathm. L (1971), S. 293 - 327
- /96/ Orszag, S. A.: Numerical Simulation of Incompressible Flows Within Simple Boundaries: Accuracy. J. Fluid Mech. 49 (1971), S. 75 - 112
- /97/ Orszag, S. A.: Galerkin Approximations to Flows within Slabs, Spheres and Cylinders. Phys. Rev. Lett. 26 (1971), S. 1100 - 1103

- / 98/ Prandtl, L.: Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. ZAMM 5 (1925), S. 136 - 139
- / 99/ Prandtl, L.; Wieghardt, K.: Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz.
Nachr. der Akad. Wiss. Göttingen, Mathphys.
Van den Loeck & Ruprecht (1945)
- /100/ Phillips, N. A.: An Example of Non-Linear Computational Instability in: The Atmosphere and Sea in Motion,
Rockefeller Inst. Press & Oxford Univ. Press,
New York (1959)
- /101/ Pond, S.; Stewart, R. W.; Burling, R. W.: Turbulence Spectra in the Wind over Waves.
J. Atmos. Sci. 20 (1963), S. 319 - 324
- /102/ Pearson, C. E.: A Computational Method for Time-Dependent Two-Dimensional Incompressible Viscous Flow Problems. SRRC-RR-64-17 (1964)
- /103/ Pao, Y. H.: Structure of Turbulent Velocity and Scalar Fields at Large Wavenumbers.
Phys. Fluids 8 (1965), S. 1063 - 1075
- /104/ Patankar, S. V.; Spalding, D. B.: Heat and Mass Transfer in Boundary Layers.
Intertext Books, London (1970), pp. 225
- /105/ Piacsek, S. A.; Williams, G. P.: Conservation Properties of Convective Difference Schemes.
J. Comp. Phys. 6 (1970), S. 392 - 405
- /106/ Paquin, J. E.; Pond, S.: The Determination of the Kolmogoroff Constants for Velocity, Temperature and Humidity Fluctuations from Second- and Third-Order Structure Functions.
J. Fluid Mech. 50 (1971), S. 257 - 269
- /107/ Reynolds, O.: On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion.
Phil. Trans. Roy. Soc. London A 186 (1894), S. 123
- /108/ Rotta, J.: Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. 1. Mitteilung.
Z. Physik 129 (1951), S. 547 - 572
- /109/ Rotta, J. C.: Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. 2. Mitteilung.
Z. f. Physik 131 (1951), S. 51 - 77
- /110/ Richtmyer, R. D.: A Survey of Difference Methods for Non-Steady Fluid Dynamics. NCAR T. N. 63-2 (1962)

- /111/ Richtmyer, R. D.; Morton, K. W.: Difference Methods for Initial-Value Problems.
2nd ed., Interscience Publ. (1967), pp. 403
- /112/ Rimon, Y.: Numerical Solution of the Time-Dependent Incompressible Viscous Flow Over a Disk or a Sphere.
Ph. D. thesis, Princeton Univ. (1968)
- /113/ Rodi, W.; Spalding, D. B.: A Two-Parameter Model of Turbulence, and its Application to Free Jets.
Wärme- und Stoffübertragung 3 (1970), S. 85 - 95
- /114/ Rotta, J. C.: Über eine Methode zur Berechnung turbulenter Scherströmungsfelder.
ZAMM 50 (1970) T 204 - T 205
- /115/ Rotta, J. C.: Turbulente Strömungen.
B. G. Teubner-Verlag Stuttgart (1972)
- /116/ Runchal, A. K.; Spalding, D. B.: Steady Turbulent Flow and Heat Transfer Downstream of a Sudden Enlargement in a Pipe of Circular Cross-Section.
Wärme- und Stoffübertragung 5 (1972), S. 31 - 38
- /117/ Stokes, G. G.: On the theories of the internal friction of fluids in motion. Trans. Cambridge Phil. Soc. 8 (1845), 287 - 305
- /118/ Smagorinsky, J. S.: General Circulation Experiments with the Primitive Equations: I. The Basic Experiment. Mon. Weather Rev. 91 (1963), S. 99 - 164; insbesondere S. 103 - 106
- /119/ Szabó, I.: Einführung in die Technische Mechanik, Springer-Verlag (1963), S. 240
- /120/ Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie
Verlag G. Braun, Karlsruhe, 5. Aufl. (1965)
- /121/ Schönauer, W.: Die Lösung der dreidimensionalen instationären Navier-Stokes-Gleichung mit dem Differenzverfahren.
Habilitationsschrift an der Universität Karlsruhe (1969)
DFVLR-Bericht (1970) DLR FB 70-15
- /122/ Schlechtendahl, E. G.: DYSYS - A Dynamic System Simulator for Continuous and Discrete Changes in state.
KFK 1209 (1970)
- /123/ Spalding, D. B.: A Noval Finite-Difference Formulation for Differential Expressions Involving Both First and Second Derivatives.
Imperial College, London BL/TN/A/39 (Nov. 1970)

- /124/ Schumann, U.: PLOTHL - Ein Fortran IV Unterprogramm zur Darstellung von Funktionen von zwei unabhängigen Variablen durch ihre Höhenlinien auf einem Plotter. KFK 1486 (1971)
- /125/ Schumann, U.: Ein Verfahren zum Transponieren großer, sequentiell gespeicherter Matrizen. Angewandte Informatik (1972), S. 213 - 216
- /126/ Schumann, U.: Ein Unterprogrammpaket zur dynamischen Verwaltung sehr großer, in Datenblöcke konstanter Länge aufgeteilter Datenmengen in Haupt- und Externspeicher. (unveröffentlichte IRE 6-Notiz, 1972)
- /127/ Spalding, D. B.: A two-equation model of Turbulence. VDI-Forsch.-Heft 549 (1972), S. 5 - 16
- /128/ Schumann, U.: Comments on "A Fast Computer Method for Matrix Transposing" and Application to the Solution of Poisson's Equation. IEEE Transact. Comp. (1973)
- /129/ Smidt, D.: Engpaß Genehmigungsverfahren? Atomwirtschaft (1973), S. 116 - 121
- /130/ Taylor, G. I.: Statistical Theory of Turbulence. Proc. Royal Soc. A 151 (1935), S. 421 - 464
- /131/ Taylor, G.I.; Green, A. E.: Mechanism of the Production of Small Eddies from Large Ones. Proc. Royal Soc. A 158 (1937), S. 499 - 521
- /132/ Taylor, G. I.: The Spectrum of Turbulence. Proc. Roy. Soc. London A 164 (1938), S. 476 - 490
- /133/ Townsend, A. A.: Local Isotropy in the Turbulent Wake of a Cylinder. Australian J. of Sci. Res. 1, No. 2 (1948), S. 161 - 174
- /134/ Townsend, A. A.: The Structure of Turbulent Shear Flow. Cambridge, Univ. Press (1956)
- /135/ Tobey, R. et al.: PL/1-FORMAC Interpreter, User's Reference Manual, IBM (1967), Progr. No. 306 D, 03.3.004
- /136/ Uberoi, M. S.; Kovasznay, L. S. G.: On Mapping and Measurement of Random Fields. Quart. Appl. Math. 10 (1952), 375 - 393
- /137/ Uberoi, M. S.: Correlations Involving Pressure Fluctuations in Homogeneous Turbulence. NACA TN 3116 (1954)

- /138/ Uberoi, M. S.: Equipartition of Energy and Local Isotropy in Turbulent Flows.
J. Appl. Phys. 28 (1957), S. 1165 - 1170
- /139/ Weizsäcker, G. F. von: Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynolds'schen Zahlen.
Z. Physik 124 (1948), S. 614 - 627
Proc. Roy. Soc. London 195 A (1948), S. 402
- /140/ Williamson, D.: Stability of Difference Approximations to Certain Partial Difference Equations of Fluid Dynamics. J. Comp. Phys. 1 (1966), S. 51 - 67
- /141/ Williams, G. P.: Numerical Integration of the Three-Dimensional Navier-Stokes Equations for Incompressible Flow.
J. Fluid Mech. 37 (1969), S. 727 - 750
- /142/ Wyngaard, J. C.; Pao, Y. H.: Some Measurements of the Fine Structure of Large Reynolds Number Turbulence. (Ehlers, J. et al.(ed.):) Lecture Notes in Physics 12, Statistical Models and Turbulence, Proc. of a Symposium at San Diego, July 15. - 21, 1971, Springer-Verlag (1972)

Tabelle 1

Bisherige Angaben für $a_1 - a_8$ [115,113,91,116]

(Zum Vergleich enthält die Tabelle die in den verschiedenen Arbeiten benutzten Symbole)

Term, a_i		Rotta (1972)		Rodi-Spalding (1970)		Ng-Spalding (1972)		Runchal-Spalding(1972)	
			*)		***)				
$\langle u'w' \rangle$	a_1	k	0.56	C_μ	1.	-	1.	C_μ	0.20
$\langle E \rangle$, Dissipation	a_2	c	0,18	C_D	0.055, 0.09	C_D	0.1	C_E	0.31
$\langle \epsilon \rangle$, Diffusion	a_3	k_q	0,38	C_μ/σ_{KL}	1.	$\frac{1}{\sigma_\theta}$	0.5	$\frac{C_\mu}{\sigma_{\theta,k}}$	0.133
L-Produktion	a_4	ξ	1.2	C_B	1.	C_p	0.84	-	
	a_5	ξ_3	?**)	-	0.	-	0.	-	
L-Senke	a_6	C_L	0.667 0.8	C_S/K_D	0.634 0.723	C_M/C_D	X****)	-	
L-Diffusion	a_7	k_{qL}	?**)	$\frac{C_\mu(1-C_{KL})}{\sigma_{KL}}$	1.	$1/\sigma_2$	0.5	-	
	a_8	L	?**)	$\frac{1}{(1+C_{KL})}$	3.33	σ_2/σ_1	1.67	-	

*) Die Werte werden aus Angaben von Wieghardt abgeleitet [99]

**) Eine der Konstanten a_5, a_7, a_8 folgt aus
 $-a_4 - 2k^2 a_5 + a_6 - k^2 a_7 a_8 / a_2 = 0$; $k \approx 0.4$

***) erste Zahl für Freistrahlfeld aus rechteckiger Düse; zweite für kreisförmige Düse.

****) $X = \frac{1}{C_D} [C_M + C_W (L/z)^q]$, $C_M = 0.055$, $C_W = 22.$, $q = 4$.

T a b e l l e 2

Nach Ng-Spalding (1972): Variation der berechneten Zielwerte bei Variation
je einer Konstanten um 5% [91]

Variierte Konstante		mittlere Variation der Ziel- werte in Prozent
L - Produktion	a_4	4.9
$\langle E' \rangle$ - Dissipation	a_2	3.9
L - Senke	$a_2 \cdot a_6$	3.1
Var. der L-Senke mit dem Ort z	q c_w	1.2 0.7
L-Diffusion	$a_7 \cdot a_8$	0.5
"	a_7	0.4
$\langle E' \rangle$ - Diffusion	a_3	0.4

T a b e l l e 3

Kolmogorov - Konstante α

a) Experimentelle Befunde

Autoren	Ref.	Jahr	Strömungsart	Standardabw.	Mittelwert
Grant et al	46	1962	Tiden-Strömung	1,22 - 1,81	1,44
Gibson	47	1963	Freistrah	1,57 - 1,62	1,60
Pond et al.	101	1963	Wind über Wellen	10%	1,41
Comte-Bellot	18	1965	Plattenströmung		1,55
Paquin, Pond	106	1971	Wind	+ 0,28	1,58
Wyngaard, Pao	142	1971	Wind über dem Boden; Höhe 5,66 - 22,6	+ 0,06	1,7
Boston, Burling	17	1972	" 4 m	± 0.06	1,56

b) Theoretische Vorhersagen

Kraichnan	69	1965	-	-	1,77
Kraichnan	70	1966	-	-	1,5

c) Empfehlungen

Pao	103	1965	-	-	1,5
Lilly	80	1966	-	-	1,41
Rotta	115	1972	-	-	1,44
diese Arbeit	-	-	-	-	1,5

T a b e l l e 4:

FORTTRAN-Unterprogramme zur direkten numerischen
Integration der Integrale d_k^* , $k=1,2,\dots,5$

```

FUNCTION D1(A1,A2,A3,XS1,XS2)
COMMON/WORK/ Y1(100),Y2(100),Y3(100),Z1(100),Z2(100),Z3(100)
LOGICAL FIRST
DR=1./3.
N=MAX(1,2,3)
N2=MAX(10,MIN(99,2*N))
N=MAX(1,2,3)
N3=MAX(10,MIN(99,N))
H2=2.*A2/N2
H3=A3/N3
N2=N2+1
N3=N3+1
FIRST= (ABS(XS1).GT.1.E-10)
T2=-A2
DO 2 I2=1,N2
IF(I2)GOTO5
IF(ABS(XS2-T2).GT.1.E-10)GOTO5
Y2(I2)=(A2-ABS(T2))*0.225*A3**2.6666666666666666
GOTO 4
5 CONTINUE
XS1=XS1*XS1
XS2=XS2-T2**2
AT2=A2-ABS(T2)
T3=0.
DO 3 I3=1,N3
T3=T3+T2
T3=T3+T3
R=XS12+X2T2+T3T3
Y3(I3)=(A3-T3)*AT2*(R**DR)*(1.-XS12/(4.*R))
3 T3=T3+H3
CALL QSF(H3,Y3,Z3,N3)
Y2(I2)=Z3(N3)
CONTINUE
2 T2=T2+H2
CALL QSF(H2,Y2,Z2,N2)
D1=2.*Z2(N2)/(A2*A3**2)
RETURN
END

FUNCTION D2(A1,A2,A3,XS1,XS2)
COMMON/WORK/ Y1(100),Y2(100),Y3(100),Z1(100),Z2(100),Z3(100)
COMMON/NNNNN/NN
DR=1./3.
DR940=9./40.
N1=MAX(10,MIN(99,IFIX(NN*MAX(1,2,3))))
N3=MAX(10,MIN(99,IFIX(NN*MAX(1,2,3))))
H1=1./N1
H3=A3/N3
N3=N3+1
T1=-A1/2.
DO 1 I1=1,N1
T2= A2/2.
R1=(T1+XS1)**2
FXS1=R1
DO 2 I2=1,N2
T3=0.
R2=R1+(T2+XS2)**2
IF(R2.LT.1.E-10)GOTO 21
DO 3 I3=1,N3
R=R2+T3*T3
F=1.
IF(R.GT.1.E-10) F=1.-FXS1/(4.*R)
Y3(I3)=(A3-T3)*R**DR940*F
3 T3=T3+H3
CALL QSF(H3,Y3,Z3,N3)
Y2(I2)=Z3(N3)
GOTO 2
21 Y2(I2)=DR940*A3**DR940
2 T2=T2+H2
CALL QSF(H2,Y2,Z2,N2)
Y1(I1)=Z2(N2)
1 T1=T1+H1
CALL QSF(H1,Y1,Z1,N1)
D2=2.*Z1(N1)/A3
RETURN
END

FUNCTION D3(A1,A2,A3,XS1,XS2)
COMMON/WORK/ Y1(100),Y2(100),Y3(100),Z1(100),Z2(100),Z3(100)
COMMON/NNNNN/NN
DR=1./3.
DR940=9./40.
N1=MAX(10,MIN(99,IFIX(NN*MAX(1,2,3))))
N2=MAX(10,MIN(99,IFIX(NN*MAX(1,2,3))))
N3=MAX(10,MIN(99,IFIX(NN*MAX(1,2,3))))
H1=1./N1
H2=A2/N2
H3=A3/N3
N2=N2+1
N3=N3+1
T1=-A1/2.
DO 1 I1=1,N1
T2= A2/2.
R1=(T1+XS1)**2
FXS1=R1
DO 2 I2=1,N2
T3=0.
R2=R1+(T2+XS2)**2
IF(R2.LT.1.E-10)GOTO 21
DO 3 I3=1,N3
R=R2+T3*T3
F=1.
IF(R.GT.1.E-10) F=1.-FXS1/(4.*R)
Y3(I3)=(A3-T3)*R**DR940*F
3 T3=T3+H3
CALL QSF(H3,Y3,Z3,N3)
Y2(I2)=Z3(N3)
GOTO 2
21 Y2(I2)=DR940*A3**DR940
2 T2=T2+H2
CALL QSF(H2,Y2,Z2,N2)
Y1(I1)=Z2(N2)
1 T1=T1+H1
CALL QSF(H1,Y1,Z1,N1)
D3=2.*Z1(N1)/A3
RETURN
END

FUNCTION D4(A1,A2,A3,XS1,XS2)
COMMON/WORK/ Y1(100),Y2(100),Y3(100),Z1(100),Z2(100),Z3(100)
COMMON/NNNNN/NN
R=XS1*XS2
R=R*R
N1=1
Z1(N1)=0.
IF(R.GT.1.E-10)F=1.- (XS1+T1)**2/(4.*R)

```

Fortsetzung T a b e l l e 4

```

IF(R.LT.,L.E-10)GOTO995
DR=2./3.
N1=MAXO(13,MING(99,IFIX(NN*AMAX1(L.,A1))))
N2=MAXO(10,MINO(99,IFIX(NN*AMAX1(L.,A2))))
N3=MAXO(10,MINO(99,IFIX(NN*AMAX1(L.,A3))))
H1=A1/N1
H2=A2/N2
H3=A3/N3
N3=N3+1
T1=-0.5*H1
DO 1 I1=1,N1
T2=-0.5*H2
P1=(T1+XS1)
R12=R1*R1
DO 2 I2=1,N2
T3=0.
R2=T2+XS2
R13=R12+R2*R2
R2=R1*R2
DO 3 I3=1,N3
R=R13+T3*T3
Y3(I3)=(R2 /R*DR3)*(A3-T3)
3 T3=T3+H3
CALL QSF(H3,Y3,Z3,N3)
Y2(I2)=Z3(N3)
2 T2=T2+H2
CALL QSF(H2,Y2,Z2,N2)
Y1(I1)=Z2(N2)
1 T1=T1+H1
CALL QSF(H1,Y1,Z1,N1)
995 CONTINUE
D4=-0.5*Z1(N1)/A3
RETURN
END
FUNCTION D5(A1,A2,A3,XS1,XS2)
COMMON/WORK/ Y1(100),Y2(100),Y3(100),Z1(100),Z2(100),Z3(100)
COMMON/NNNNN/NN
DATA DR3/0.666667/
N1=MAXO(10,MINO(99,IFIX(NN*AMAX1(L.,A1))))
XS1=.5*A1
XS2=A2
Z1(N1)=0.
R=XS1*XS2
R=R*R
IF(R.LT.,L.E-10) GOTO 999
N3=MAXO(10,MINO(99,IFIX(NN*AMAX1(L.,A3))))
H1= 2.*A1/N1
N1=N1+1
H3= A3/N3
N3=N3+1
T1=-A1
XS2Q=XS2*XS2
DO 1 I1=1,N1
T3=0.
A= A1-ABS(T1)
B= T1+XS1
B2=B*B+XS2Q
DO 3 I3=1,N3

```

C C

T a b e l l e 5:

FORTRAN-Unterprogramme zur näherungsweise Berechnung
der Integrale d_k^* , $k=1, 2, \dots, 5$

```

FUNCTION _DIN(H1,H2,H3,X1,X2)
REAL X(1)/(-.375,-.4375,-.5),L1(328,.15625E-1,.9765625E-3),*.078125
DO=1/.07257
DC=*.45*H2**DU+H3**DU**(.0.7257*.666666667E0)
DU= X1*X1*X2*X2
IF(DU.GT.0.) DU= (1.-X1*X1/(4.*DU))*DU*.0.333333E0
Q= DC/(DU+DU)
P1= X1*X1*Q
P2= X2*X2*Q
P3= (1.-H3)
P3= P3*P3*Q
P4= (1.-H1)
P4= P4*P4*Q
P5= (1.-H2)
P5= P5*P5*Q
P1= P1/(1.+ (X(6)*P1)**2)
P2= P2/(1.+ (X(7)*P2)**2)
P3= P3/(1.+ (X(8)*P3)**2)
P4= P4/(1.+ (X(9)*P4)**2)
P5= P5/(1.+ (X(10)*P5)**2)
P6= AMI*NI*DU/DO,.16C.1
B= DU*DO*EXP(-B)+X(1)*P1+X(2)*P2+X(3)*P3+X(4)*P4+X(5)*P5
D3=N*B
D3=D3*N
RETURN
END
FUNCTION _DAN(H1,H2,H3,X1,X2)
REAL X(1)/9.3691X(1)+9.125,11.1711+2.*078125,1.30957,.0,.6953125
1..9590234,.3/
B=X1*X2
IF(ABS(B).LT.1E-10) GOTO 999
B= **.*(11.*X(1)+5)*.5**2*(1.-X(2)*.5)**2+ X(3)*X(3)
1 / ((H1+X(1))*X1**2+H2*X(2)*X2**2+ (X(3)*H3)**2))*.666666667E0
P1= (1.-H1)
P1= P1*P1
P1= P1/(1.+ (X(6)*P1)**2)
P2= (1.-H2)
P2= P2*P2
P2= P2/(1.+ (X(5)*P2)**2)
P3= (1.-H3)
P3= P3*P3
P3= P3/(1.+ (X(6)*P3)**2)
P1= X(7)*P1+X(8)*P2+X(9)*P3
B= X1*X2*(B*P1)
D3=N*-0.13761*B
D3=D3*N
RETURN
END
FUNCTION _DN (H1,H2,H3,X1,X2)
REAL X(1)/5.624E22,6.376953,1.511/19.12.57422,.3763945,1..
1 E-0766C,.+15.1123,.C/
B=X1*X2
IF(ABS(B).LT.1E-10) GOTO 999
B= **.*(11.*X(1)+5)*.5**2*(1.-X(2))*2+ X(3)*X(3)
1 / ((H1+X(1))*X1**2+H2*X(2)*X2**2+ (X(3)*H3)**2))**.6666667E0
P1= 1.-H1
P1= P1*P1
P1= P1/(1.+ (X(4)*P1)**2)
P2= 1.-H2
P2= P2*P2
P2= P2/(1.+ (X(5)*P2)**2)
P3= 1.-H3
P3= P3*P3
P3= P3/(1.+ (X(6)*P3)**2)
B= X1*X2*(B*P1+X(7)*P1+X(8)*P2+X(9)*P2)
D3=N= -.845673E-1*B
D3=D3*N
RETURN
END
END
FUNCTION _DIN(H1,H2,H3,X1,X2)
REAL X(1)/(-.234375,-.647625,.3560035E-1,-.2851562,-.2441406E-1
1,-2.156494,.4,377668,117175,1.3125,.7668457/
DO=(1.-9.* (1.03125*H1+H1)**.3333333E0)**2+.29854
1 +(.24*(1.03125*H2+H2)**.3333333E0)**2+.29854
1 +(.45 * (H3+H3)**.3333333E0)**2+.29854)**2+.4350
DU= X1*X1+X2*X2
IF(DU.GT.0.) DU= (1.-X1*X1/(4.*DU))*DU**.3333333E0
D2=N*B
D2=D2*N
RETURN
END
FUNCTION _D3N(H1,H2,H3,X1,X2)
REAL X(1)/(-.234375,-.647625,.3560035E-1,-.2851562,-.2441406E-1
1,-2.156494,.4,377668,117175,1.3125,.7668457/
DO=(1.-9.* (1.03125*H1+H1)**.3333333E0)**2+.29854
1 +(.24*(1.03125*H2+H2)**.3333333E0)**2+.29854
1 +(.45 * (H3+H3)**.3333333E0)**2+.29854)**2+.4350
DU= X1*X1+X2*X2
IF(DU.GT.0.) DU= (1.-X1*X1/(4.*DU))*DU**.3333333E0
D2=N*B
D2=D2*N
RETURN
END

```

T a b e l l e 6: Vergleich zwischen exakter und näherungsweise Lösung
der Integrale d_k^* , $k=1, 2, \dots, 5$

EXAKTE WERTE FÜR NN= 50										
DX1	DX2	DX3	XS1	XS2	D1	D2	D3	D4	D5	
1.000	1.000	1.000	.0	.0	.629273	.550611	.610374	.0	.0	
NAEHERUNGSWERTE=					.629293	.550591	.610363	.0	.0	
1.250	.8000	1.000	.0	.0	.587434	.583699	.601811	.0	.0	
NAEHERUNGSWERTE=					.588521	.585463	.584646	.0	.0	
.8000	1.250	1.000	.0	.0	.681658	.524992	.635318	.0	.0	
NAEHERUNGSWERTE=					.582437	.514422	.619722	.0	.0	
2.000	.8000	.6250	.0	.0	.502878	.617508	.599134	.0	.0	
NAEHERUNGSWERTE=					.588333	.512840	.502591	.0	.0	
.8000	2.000	.6250	.0	.0	.779179	.429627	.690003	.0	.0	
NAEHERUNGSWERTE=					.761372	.487552	.667991	.0	.0	
1.000	1.000	1.000	1.000	.0	.884836	.819854	.857132	.0	.0	
NAEHERUNGSWERTE=					.902753	.824927	.874311	.0	.0	
1.000	1.000	1.000	.0	1.000	1.74151	1.06414	1.05290	.0	.0	
NAEHERUNGSWERTE=					1.06213	1.04672	1.05389	.0	.0	
1.000	1.000	1.000	2.000	.0	1.25253	1.21832	1.23629	.0	.0	
NAEHERUNGSWERTE=					1.26763	1.20377	1.24406	.0	.0	
1.000	1.000	1.000	.0	2.000	1.60253	1.61436	1.60853	.0	.0	
NAEHERUNGSWERTE=					1.53334	1.59448	1.60383	.0	.0	
1.000	1.000	1.000	3.000	.0	1.59738	1.57613	1.58796	.0	.0	
NAEHERUNGSWERTE=					1.60417	1.56198	1.58817	.0	.0	
1.000	1.000	1.000	.0	3.000	2.78859	2.09591	2.09238	.0	.0	
NAEHERUNGSWERTE=					2.78342	2.07891	2.08412	.0	.0	
1.000	1.000	1.000	.5000	1.000	1.37322	1.08750	1.07857	-.156930	-.845573E-01	
NAEHERUNGSWERTE=					1.34955	1.04511	1.05133	-.876968E-01	-.845573E-01	
1.000	1.000	1.000	2.000	1.000	1.41116	1.39668	1.40314	-.217366	-.165805	
NAEHERUNGSWERTE=					1.35439	1.31730	1.32711	-.214470	-.155887	
4.000	.5000	.5000	4.000	.0	1.89534	1.85482	1.87729	.0	.0	
NAEHERUNGSWERTE=					1.88134	1.97877	1.88864	.0	.0	
.5000	4.000	.5000	4.000	.0	2.37186	1.89255	1.99081	.0	.0	
NAEHERUNGSWERTE=					2.13323	1.88756	1.99329	.0	.0	
4.000	.5000	.5000	2.000	4.000	2.58322	2.62638	2.60454	-.387563	-.226153	
NAEHERUNGSWERTE=					2.52293	2.46739	2.48395	-.389743	-.226155	
.5000	4.000	.5000	1.000	4.000	2.49312	2.53617	2.51448	-.167111	-.150400	
NAEHERUNGSWERTE=					2.60211	2.51128	2.52312	-.170391	-.150400	
1.000	1.000	1.000	.5000	.5000	.822632	.810274	.811418	-.137926	-.642200E-01	
NAEHERUNGSWERTE=					.921765	.796553	.804990	-.917400E-01	-.687301E-01	
.1526E-04	.5004	.1309E+06	.7539	.5671	1163.37	1160.08	1160.12	-.887003E-03	-.778719E-03	
NAEHERUNGSWERTE=					1153.12	1160.45	1160.30	-.209434E-01	-.483762E-03	
1.179	1.495	.5672	.4402E-01	.5547E-01	.660351	.484572	.620180	-.909008E-01	-.105170E-02	
NAEHERUNGSWERTE=					.552873	.548969	.631080	-.497372E-02	-.214453E-02	
.5051	.8858	2.235	.8165E-01	.5208	.976992	.962490	.966936	-.556944E-01	-.122855E-01	
NAEHERUNGSWERTE=					.978548	1.03323	.953560	-.651390E-02	-.134593E-01	
1.985	.0386E-01	6.006	.5722	.3971E-01	1.53633	1.58315	1.55947	-.101013E-01	-.225960E-02	
NAEHERUNGSWERTE=					1.52617	1.45553	1.55411	-.209490E-02	-.276192E-02	
1.174	1.603	.5316	.8829	.7943	1.30497	1.00474	1.01253	-.194115	-.117807	
NAEHERUNGSWERTE=					1.30459	.961849	.977707	-.200665	-.116638	
1.361	1.526	.4815	.9325E-01	.7213	.849397	.869887	.845786	-.127162	-.140615E-01	
NAEHERUNGSWERTE=					.911777	.887366	.891261	-.277261E-01	-.176798E-01	
.4891	1.425	1.435	.4391	.2948	.873158	.750833	.819140	-.106793	-.483967E-01	
NAEHERUNGSWERTE=					.874854	.751760	.791416	-.444264E-01	-.463739E-01	
1.422	1.838	.3825	.9645	.9943	1.14938	1.12704	1.12505	-.215942	-.129191	
NAEHERUNGSWERTE=					1.11657	1.07605	1.08718	-.232628	-.129708	
.1895	1.458	3.617	.1929	.2957E-01	1.23135	1.07653	1.15612	-.348292E-01	-.265150E-02	
NAEHERUNGSWERTE=					1.21371	.983607	1.18651	-.621171E-03	-.159498E-02	
.8316	.1272	9.450	.6303	.8847	2.16542	2.16995	2.16782	-.674606E-01	-.436002E-01	
NAEHERUNGSWERTE=					2.13827	2.13849	2.15344	-.355640E-01	-.447302E-01	
1.474	1.784	.3804	.9127	.2352	.925362	.761321	.860252	-.163858	-.465344E-01	
NAEHERUNGSWERTE=					.934152	.814433	.857378	-.148743	-.452523E-01	
.2496	1.481	2.706	.4112	.8112	1.21811	1.18160	1.19412	-.862264E-01	-.628895E-01	
NAEHERUNGSWERTE=					1.22267	1.14885	1.16759	-.442654E-01	-.599843E-01	

T a b e l l e 7: FORTRAN-Unterprogramme D11, D12, D13, D14 und FED1
gemäß Kap.A2.6

```

END
FUNCTION D1211(H1,H2,H3)
D1211=-4.*(D1(H1,H2,H3,.5*H1,0.)-D1(H1,H2,H3,1.5*H1,0.))/(H1*H1)
RETURN
END
FUNCTION D1212(H1,H2,H3)
D1212=- (D3(H1,H2,H3,0.,0.)-D3(H1,H2,H3,0.,1.5*H2))/(H2*H2)
1 +2.*D5(H1,H2,H3,.5*H1,H2)/(H1*H2)
RETURN
END
FUNCTION D1311(H1,H2,H3)
D1311=D1111(H1,H2,H3)
RETURN
END
FUNCTION D1312(H1,H2,H3)
D1312=- (D1(H1,H2,H3,0.,0.)-D1(H1,H2,H3,0.,H2))/(H2*H2)
1 - (D1(H2,H1,H3,0.,0.)-D1(H2,H1,H3,H2,0.))/(H1*H1)
2 +4.*D4(H1,H2,H3,.5*H1,.5*H2)/(H1*H2)
RETURN
END
FUNCTION D1411(H1,H2,H3)
D1411=- (14.*D1(H1,H2,H3,0.,0.)-17.*D1(H1,H2,H3,H1,0.)
1 +2.*D1(H1,H2,H3,2.*H1,0.)+D1(H1,H2,H3,3.*H1,0.))/(18.*H1*H1
2)
RETURN
END
FUNCTION D1412(H1,H2,H3)
D1412=- (17.*D1(H1,H2,H3,0.,0.)-8.*D1(H1,H2,H3,0.,H2)
1 +D1(H1,H2,H3,0.,2.*H2)+D1(H1,H2,H3,H1,2.*H2)
2 -D1(H1,H2,H3,H1,0.))/(18.*H2*H2)
3 - (17.*D1(H2,H1,H3,0.,0.)-8.*D1(H2,H1,H3,0.,H1)
4 -D1(H2,H1,H3,0.,2.*H1)+D1(H2,H1,H3,H2,2.*H1)
5 -D1(H2,H1,H3,H2,0.))/(18.*H1*H1)
6 + (15.*D4(H1,H2,H3,.5*H1,.5*H2)-D4(H1,H2,H3,1.5*H1,.5*H2)
7 -D4(H1,H2,H3,.5*H1,1.5*H2)-D4(H1,H2,H3,1.5*H1,1.5*H2))
8 /(14.*H1*H2)
RETURN
END
FUNCTION FED1(X1,X2,X3)
EXTERNAL FED11,FED12
FED1 = SDIJ(X1,X2,X3,FED11,FED12)
RETURN
END
FUNCTION FED11(H1,H2,H3)
FED11=SQRT(H2*H3*ENERG2(H3,H3))*D1211(H1,H2,H3)
RETURN
END
FUNCTION FED12(H1,H2,H3)
FED12=.5*(SQRT(H2*H3*ENERG2(H2,H3))*D1212(H1,H2,H3)
1 +SQRT(H1*H3*ENERG2(H1,H3))*D1212(H2,H1,H3))
RETURN
END

```

```

FUNCTION D11(X1,X2,X3)
EXTERNAL D111,D1112
D11=SDIJ(X1,X2,X3,D111,D1112)
RETURN
END
FUNCTION D12(X1,X2,X3)
EXTERNAL D1211,D1212
D12=SDIJ(X1,X2,X3,D1211,D1212)
RETURN
END
FUNCTION D13(X1,X2,X3)
EXTERNAL D1311,D1312
D13=SDIJ(X1,X2,X3,D1311,D1312)
RETURN
END
FUNCTION D14(X1,X2,X3)
EXTERNAL D1411,D1412
D14=SDIJ(X1,X2,X3,D1411,D1412)
RETURN
END
FUNCTION SDIJ(X1,X2,X3,F11,F12/)
IF (ABS(1.-H1)+ABS(1.-H2)+ABS(1.-H3) .LT. 1.E-4) GOTO 2
S=0.
DO 1 I= 1,3
F=1.
DO 1 J=1,3
S=S+F*DIJ(X1,X2,X3,I,J,F11,F12)
1 F=2.
SDIJ=S
2 SDIJ= 3.*DIJ(X1,X2,X3,1,1,F11,F12)+6.*DIJ(X1,X2,X3,1,2,F11,F12)
RETURN
END
FUNCTION DIJ(H1,H2,H3,I,J,D11,D12)
DIMENSION HH(3),H(3)
HH(1)=H1
HH(2)=H2
HH(3)=H3
IF(I.EQ.J) GOTO 200
H(1)=HH(I)
H(2)=HH(J)
H(3)=HH(6-I-J)
D14= D12(H(1),H(2),H(3))
RETURN
200 JJ=MOD(I,3)+1
H(1)=HH(I)
H(2)=HH(JJ)
H(3)=HH(6-I-JJ)
D14= D11(H(1),H(2),H(3))
RETURN
END
FUNCTION D111(H1,H2,H3)
D111=-4.*(D1(H1,H2,H3,0.,0.)-D1(H1,H2,H3,H1,0.))/(H1*H1)
RETURN
END
FUNCTION D1112(H1,H2,H3)
D1112=-2.*D12(H1,H2,H3,0.,0.)-D2(H1,H2,H3,0.,H2))/(H2*H2)
1 +4.*D4(H1,H2,H3,.5*H1,.5*H2)/(H1*H2)
RETURN

```

T a b e l l e 8: Koeffizienten der Vektoren A1, A2 gemäß (A6-9)

A1	Typ a) (Bocksprung)	Typ b) (Euler)	Typ c) (DuFort-Frankel)
A1(1)	$-2\Delta t \frac{V_x}{\tau} \delta_{y v_p}$	$-\Delta t \left(\frac{ V_x }{\Delta \tau} + \frac{ V_y }{\tau \Delta \varphi} + \frac{ V_z }{\Delta x} + \frac{V_x}{\tau} \delta_{y v_p} \right)$ $-2\Delta t \mu \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\tau^2 \Delta \varphi^2} + \frac{1}{\Delta \tau^2} \right)$ $+ \frac{1}{2\tau^2} (\delta_{y v_p} + \delta_{y v_x})$	$\frac{2\Delta t}{1+\gamma} \cdot \frac{V_x}{\tau} \delta_{y v_p};$ $\gamma \equiv 2\mu \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\tau^2 \Delta \varphi^2} + \frac{1}{\Delta \tau^2} \right]$ $- \frac{\delta_{y v_x} + \delta_{y v_p}}{2\tau^2}$
A1(2)	$\frac{\Delta t \cdot V_x}{\Delta x}$	$\frac{\Delta t}{2\Delta x} (V_x + V_x) + \frac{\Delta t \mu}{\Delta x^2}$	$\frac{2\Delta t}{1+\gamma} \left(\frac{V_x}{2\Delta x} + \frac{\mu}{\Delta x^2} \right)$
A1(3)	$-\frac{\Delta t \cdot V_x}{\Delta x}$	$\frac{\Delta t}{2\Delta x} (-V_x + V_x) + \frac{\Delta t \mu}{\Delta x^2}$	$\frac{2\Delta t}{1+\gamma} \left(-\frac{V_x}{2\Delta x} + \frac{\mu}{\Delta x^2} \right)$
A1(4)	$\frac{\Delta t V_y}{\tau \Delta \varphi}$	$\frac{\Delta t}{2\tau \Delta \varphi} (V_y + V_y) + \frac{\Delta t \mu}{\tau^2 \Delta \varphi^2}$	$\frac{2\Delta t}{1+\gamma} \left(\frac{V_y}{2\tau \Delta \varphi} + \frac{\mu}{\tau^2 \Delta \varphi^2} \right)$
A1(5)	$-\frac{\Delta t V_y}{\tau \Delta \varphi}$	$\frac{\Delta t}{2\tau \Delta \varphi} (-V_y + V_y) + \frac{\Delta t \mu}{\tau^2 \Delta \varphi^2}$	$\frac{2\Delta t}{1+\gamma} \left(-\frac{V_y}{2\tau \Delta \varphi} + \frac{\mu}{\tau^2 \Delta \varphi^2} \right)$
A1(6)	$\frac{\Delta t V_z}{\Delta \tau}$	$\frac{\Delta t}{2\Delta \tau} (V_z + V_z) + \frac{\Delta t \mu}{\Delta \tau} \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \frac{1}{\tau} \right)$	$\frac{2\Delta t}{1+\gamma} \left(\frac{V_z}{2\Delta \tau} + \frac{\mu}{\Delta \tau^2} + \frac{\mu}{\tau \Delta \tau} \right)$
A1(7)	$-\frac{\Delta t V_z}{\Delta \tau}$	$\frac{\Delta t}{2\Delta \tau} (-V_z + V_z) + \frac{\Delta t \mu}{\Delta \tau} \left(\frac{1}{\Delta \tau} + \frac{1}{\tau} \right)$	$\frac{2\Delta t}{1+\gamma} \left(-\frac{V_z}{2\Delta \tau} + \frac{\mu}{\Delta \tau^2} + \frac{\mu}{\tau \Delta \tau} \right)$

A2	Typ a) (Bocksprung)	Typ b) (Euler)	Typ c) (DuFort-Frankel)
A2(1)	$1 - 4\Delta t \mu \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\tau^2 \Delta \varphi^2} + \frac{1}{\Delta \tau^2} + \frac{1}{2\tau^2} (\delta_{y v_x} + \delta_{y v_p}) \right]$	0	$\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$ $\gamma \equiv 2\mu \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\tau^2 \Delta \varphi^2} + \frac{1}{\Delta \tau^2} \right]$ $- \frac{\delta_{y v_x} + \delta_{y v_p}}{2\tau^2}$
A2(2)	$\frac{2\Delta t \mu}{\Delta x^2}$	0	0
A2(3)	$\frac{2\Delta t \mu}{\Delta x^2}$	0	0
A2(4)	$\frac{2\Delta t \mu}{\tau^2 \Delta \varphi^2}$	0	0
A2(5)	$\frac{2\Delta t \mu}{\tau^2 \Delta \varphi^2}$	0	0
A2(6)	$2\Delta t \mu \left(\frac{1}{\Delta \tau^2} - \frac{1}{\tau \Delta \tau} \right)$	0	0
A2(7)	$2\Delta t \mu \left(\frac{1}{\Delta \tau^2} + \frac{1}{\tau \Delta \tau} \right)$	0	0

Tabelle 9: Koeffizienten der Verstärkungsmatrix \underline{G} gemäß (A6-16)

Typ a) (Bocksprung)

$$A_{11} = - \Delta t \frac{V_r}{\tau} \delta y_{up}$$

$$B_{11} = - \Delta t \left(\frac{V_x}{\Delta x} S_1 + \frac{V_y}{\tau \Delta \varphi} S_2 + \frac{V_r}{\Delta \tau} S_3 \right)$$

$$A_{12} = 1 + 2\mu \Delta t \left[\frac{2}{\Delta x^2} (C_1 - 1) + \frac{2}{\tau^2 \Delta \varphi^2} (C_2 - 1) + \frac{2}{\Delta \tau^2} (C_3 - 1) - \frac{1}{\tau^2} (\delta y_{up} + \delta y_{dr}) \right]$$

$$B_{12} = 2\mu \Delta t \left[\frac{2}{\tau \Delta \tau} S_3 \right]$$

Typ b) (Euler)

$$A_{11} = \Delta t \left[(C_1 - 1) \left(\frac{|V_x|}{\Delta x} + \frac{2\mu}{\Delta x^2} \right) + (C_2 - 1) \left(\frac{|V_y|}{\tau \Delta \varphi} + \frac{2\mu}{\tau^2 \Delta \varphi^2} \right) + (C_3 - 1) \left(\frac{|V_r|}{\Delta \tau} + \frac{2\mu}{\Delta \tau^2} \right) - \delta y_{up} \frac{V_r}{\tau} - \mu (\delta y_{up} + \delta y_{dr}) \frac{1}{\tau^2} \right]$$

$$B_{11} = - S_1 \frac{V_x}{\Delta x} - S_2 \frac{V_y}{\tau \Delta \varphi} - S_3 \frac{V_r}{\Delta \tau} + S_3 \frac{2\mu}{\tau \Delta \tau}$$

$$A_{12} = B_{12} = 0$$

Typ c) (DuFort-Frankel)

$$A_{11} = \frac{\Delta t}{(1+\gamma)} \left[\frac{2\mu}{\Delta x^2} C_1 + \frac{2\mu}{\tau^2 \Delta \varphi^2} C_2 + \frac{2\mu}{\Delta \tau^2} C_3 - \frac{V_r}{\tau} \delta y_{up} \right]$$

$$B_{11} = \frac{\Delta t}{(1+\gamma)} \left[- \frac{V_x}{\Delta x} S_1 - \frac{V_y}{\tau \Delta \varphi} S_2 + \left(\frac{2\mu}{\tau \Delta \tau} - \frac{V_r}{\Delta \tau} \right) S_3 \right]$$

$$A_{12} = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} \quad ; \quad \gamma = 2\mu \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\tau^2 \Delta \varphi^2} + \frac{1}{\Delta \tau^2} - \frac{\delta y_{dr} + \delta y_{up}}{2\tau^2} \right]$$

$$B_{12} = 0$$

Tabelle 10: Fehler des Differenzenverfahrens bei laminarer Anlaufströmung.

Fall:	$\varepsilon_1 \cdot 1000$ (Wandmasche)			$\varepsilon_2 \cdot 1000$ (Mitte)		
	a) $\Delta r = 1/8$ = const	b) $\Delta r \approx 1/8$ \neq const	c) $\Delta r = 1/16$ = const	a) $\Delta r = 1/8$ = const	b) $\Delta r \approx 1/8$ \neq const	c) $\Delta r = 1/16$ = const
t						
0.04	- 2.36	- 2.01	- 0.72	- 0.24	- 0.39	- 0.06
0.08	- 2.24	- 2.22	- 0.68	- 0.47	- 0.69	- 0.13
0.12	- 2.06	- 2.31	- 0.63	- 0.48	- 0.93	- 0.12
0.16	- 1.89	- 2.34	- 0.60	- 0.25	- 0.86	- 0.08
0.20	- 1.74	- 2.34	- 0.57	- 0.11	- 0.92	- 0.01
0.24	- 1.61	- 2.32	- 0.55	+ 0.21	- 0.63	+ 0.02
0.40	- 1.30	- 2.21	- 0.49	+ 0.97	+ 0.25	+ 0.23

Tabelle 11

Testproblem Taylor-Green-Wirbel

Zeitschritt	I Fehler des hier verwendeten Ver- fahrens $\cdot 10^5$	II Fehler des von Orszag verwendeten Verfahrens $\cdot 10^5$	III Faktor der Fehler- vergrößerung bei Vervierfachung der Maschengröße
1	0.107	2.1	26
3	4.26	6.1	19
5	8.29	10	16
7	12.3	14	14
9	16.1	17	13
20	37	37	12

T a b e l l e 12: Spezifikation der Fälle K1 - K4, Z1 - Z4

	K1	K2	K3	K4	Z1	Z2	Z3	Z4
R2/R1	1	1	1	1	5	5	5	5
$\Delta x_1, \Delta x$	0.125	0.125	0.0625	0.0625	0.25	0.25	0.125	0.125
$\Delta x_2, \Delta y$	0.125	0.125	0.0625	0.0625	$\pi/16$	$\pi/16$	$\pi/32$	$\pi/32$
$\Delta x_3, \Delta t$	0.0625	0.0625	0.0625	0.018+ 0.042	0.0625	0.0625	0.0625	0.018+ 0.042
x_1, x	2	4	4	4	2	4	4	4
x_2, ϕ	1	2	2	2	π	2π	2π	2π
IM	16	32	64	64	8	16	32	32
JM	8	16	32	32	16	32	64	64
KM	16	16	16	32	16	16	16	32
IM·JM·KM	2048	8192	32768	65536	2048	8192	32768	65536
N	64	64	32	32	64	64	32	32
$\Delta t \cdot 10^3$	3.13	2.81	1.46	1.13	4.60	3.88	1.43	1.04
Problem-zeit	5.6	3.8	0.9	1.1	7.4	12.3	1.4	1.8
Zeitschritte	1440	1408	736	916	1664	3200	1088	1488
Maschinen-Rechenzeit	35'	2h30'	6h	9h	40'	5h30'	7h40'	14h

T a b e l l e 13: Konstante Fallparameter

Symbol	Def.-Gl.	Wert
Re	(1 - 13)	10000
Re_m	(1 - 14)	300000
$Re_{m_{krit}}$	(5 - 90)	2100
α	(4 - 4)	1.5
c_7	(5 - 65)	0.3
c_{10}	(5 - 87)	0.01
c_{11}	(7 - 15)	0.2
$E_{1,2}$	(7 - 8)	88000
$A_w 1,2$	(5-88)	4
$\langle \tau_{w_2} / \tau_{w_1} \rangle$	(7 - 9)	Platte 1 Ringspalt 0.87
\varnothing_1	(5 - 38)	Platte 3 Ringspalt 6·r
\varnothing_2	(5 - 55)	1.1
D^2	(5 - 46)	$3D^2$

T a b e l l e 14: Rechenzeiten pro Zeitschritt auf IBM 370/165

Anteile	K1 Z1		K2 Z2		K3 Z3		K4 Z4	
	sec	%	sec	%	sec	%	sec	%
Energie			1.9	31	8.5	34	17.6	33.6
\tilde{u}			3.7	60	14.1	56.5	29.8	57
γ			0.54	9	2.33	9.5	4.9	9.4
Gesamt	1.4	100	6.1	100	24.9	100	52.3	100

Tabelle 15:

Vergleich der maximalen Geschwindigkeiten

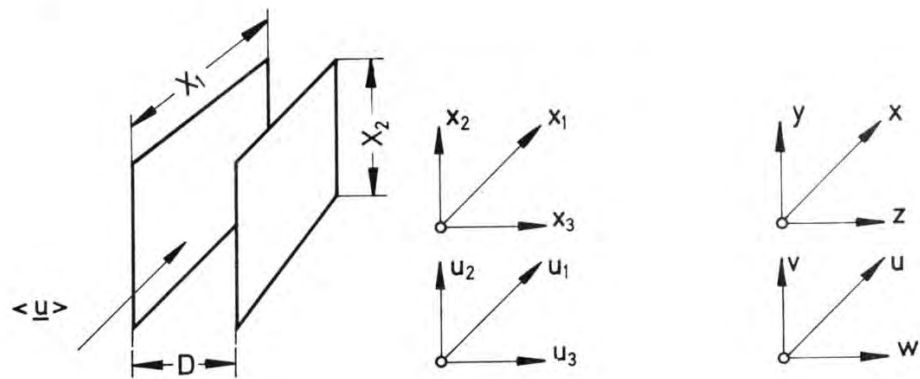
$\langle u \rangle_{\max}$	R2/R1	$10^5 \cdot Re_m$	Referenz
31.8	1	1	Clark [22]
31.5	1	4.6	Comte-Bellot [18]
27.7	1	2.4	"
27	1	1	Laufer [76]
=====			
30.1	1	∞	Deardorff [29]
=====			
28.89	1	3	K1
31.3	1	3	K2
27.4	1	3	K3
27.6	1	3	K4
=====			
28.0	5	3	Z1
28.3	5	3	Z2
27.6	5	3	Z3
27.9	5	3	Z4

T a b e l l e 16:

Vergleich der Differenz zwischen maximaler und mittlerer Geschwindigkeit

$\langle u_1 \rangle_{\max} - \langle u_1 \rangle$	R2/R1	$Re_m \cdot 10^{-5}$	Referenz
2.32	1	1	Clark [22]
2.70	1	3	Barthels [11]
2.68	5	3	"
<hr/>			
5	1	∞	Deardorff [29]
<hr/>			
3.19	1	3	K1
3.17	1	3	K2
2.60	1	3	K3
2.87	1	3	K4
2.75	5	3	Z1
2.52	5	3	Z2
2.74	5	3	Z3
3.15	5	3	Z4

Plattenströmung



Ringspaltströmung

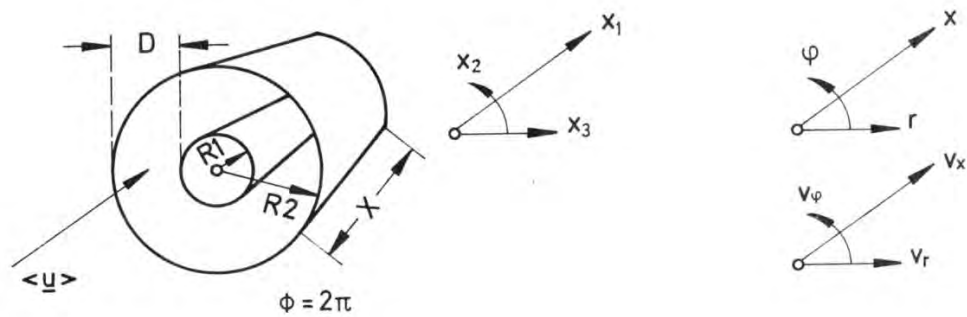


Abb.1: Die betrachteten Kanalgeometrien

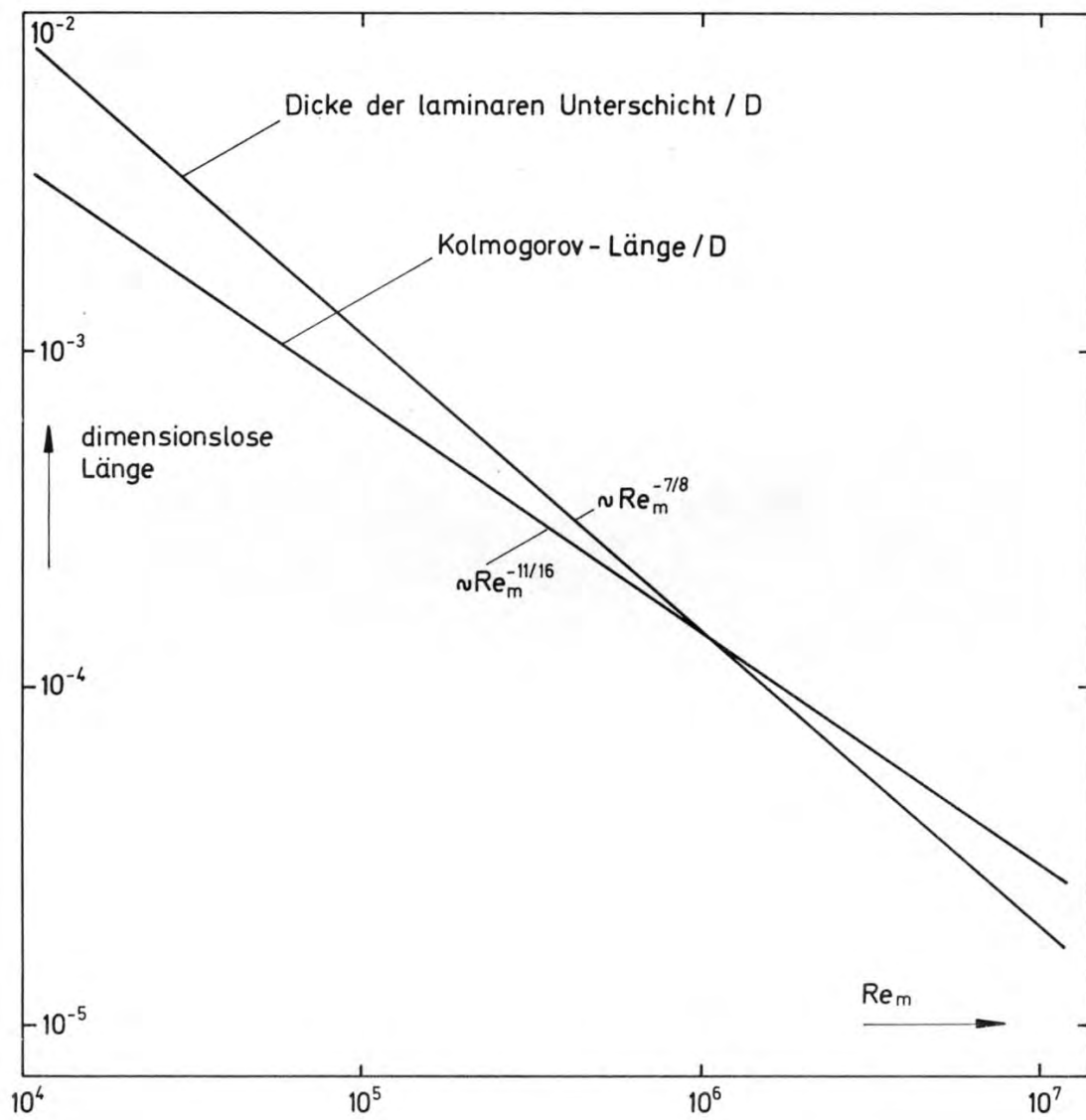


Abb.2: Zur Abschätzung der erforderlichen Auflösung

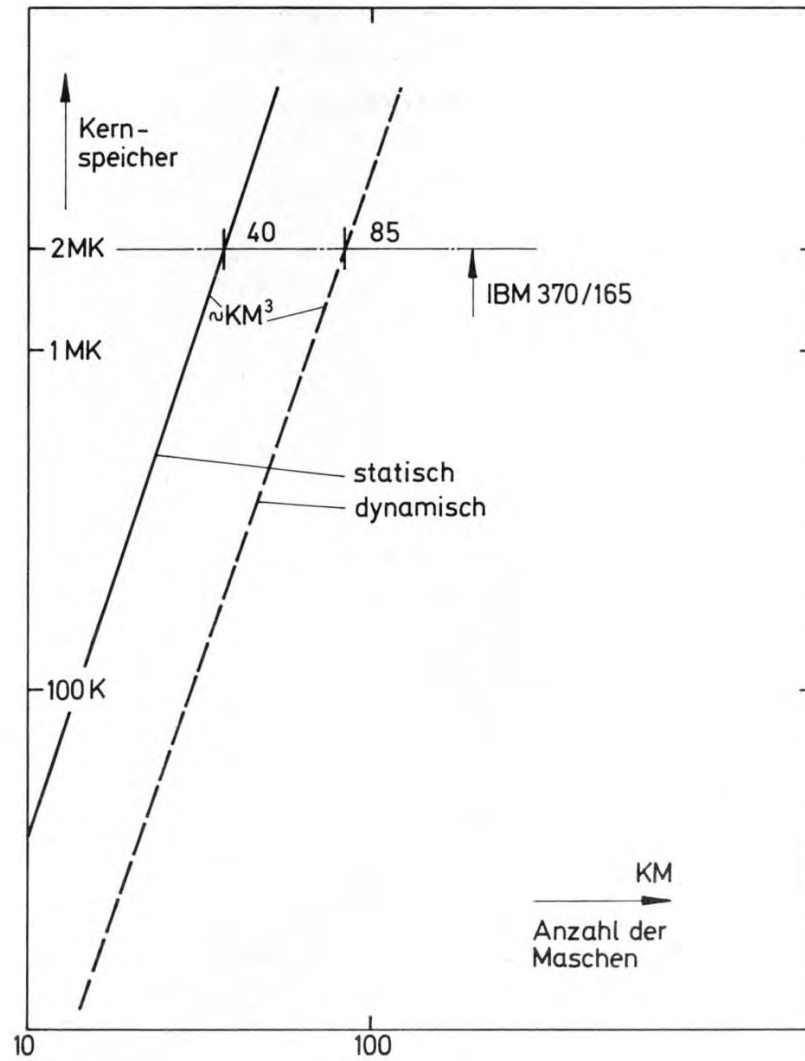


Abb.3: Benötigter Speicherplatz als Funktion der Anzahl der Maschen einer Richtung

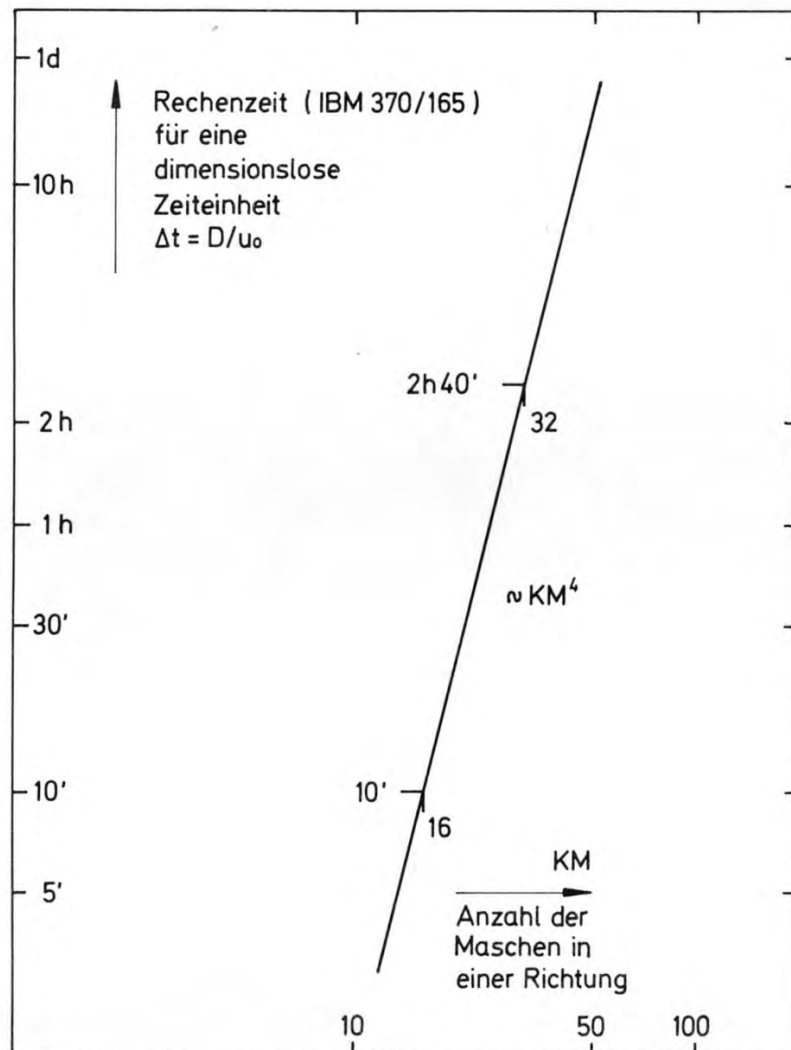


Abb.4: Benötigte Rechenzeit als Funktion der Anzahl der Maschen einer Richtung

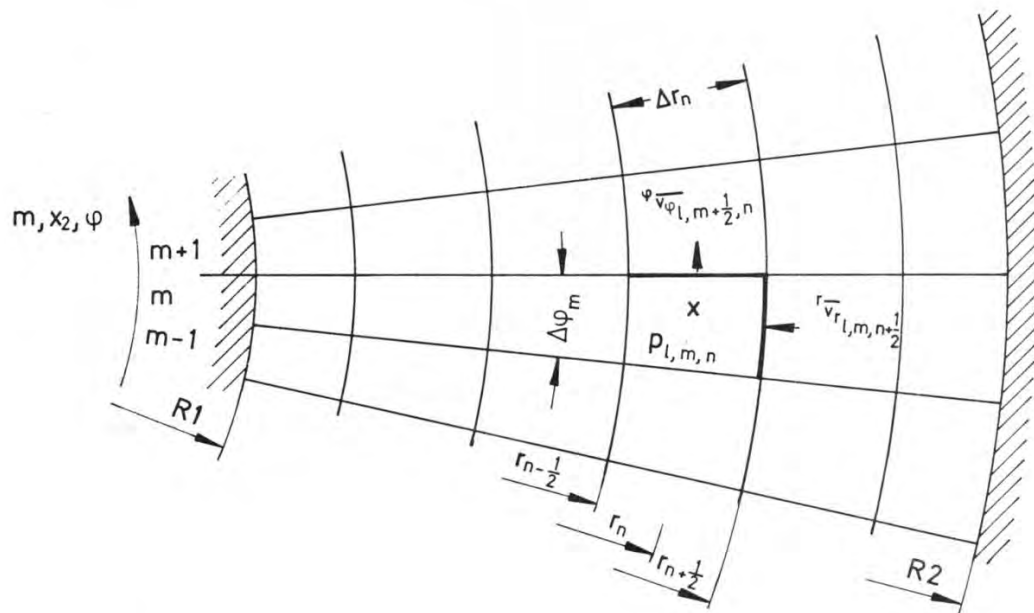
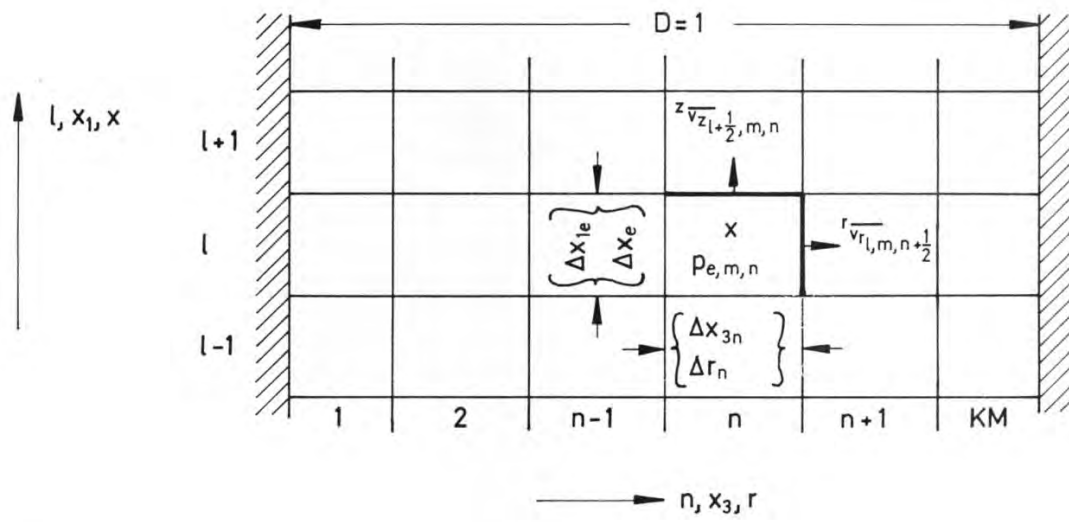


Abb.5: Überlapptes Maschennetz
(staggered grid)

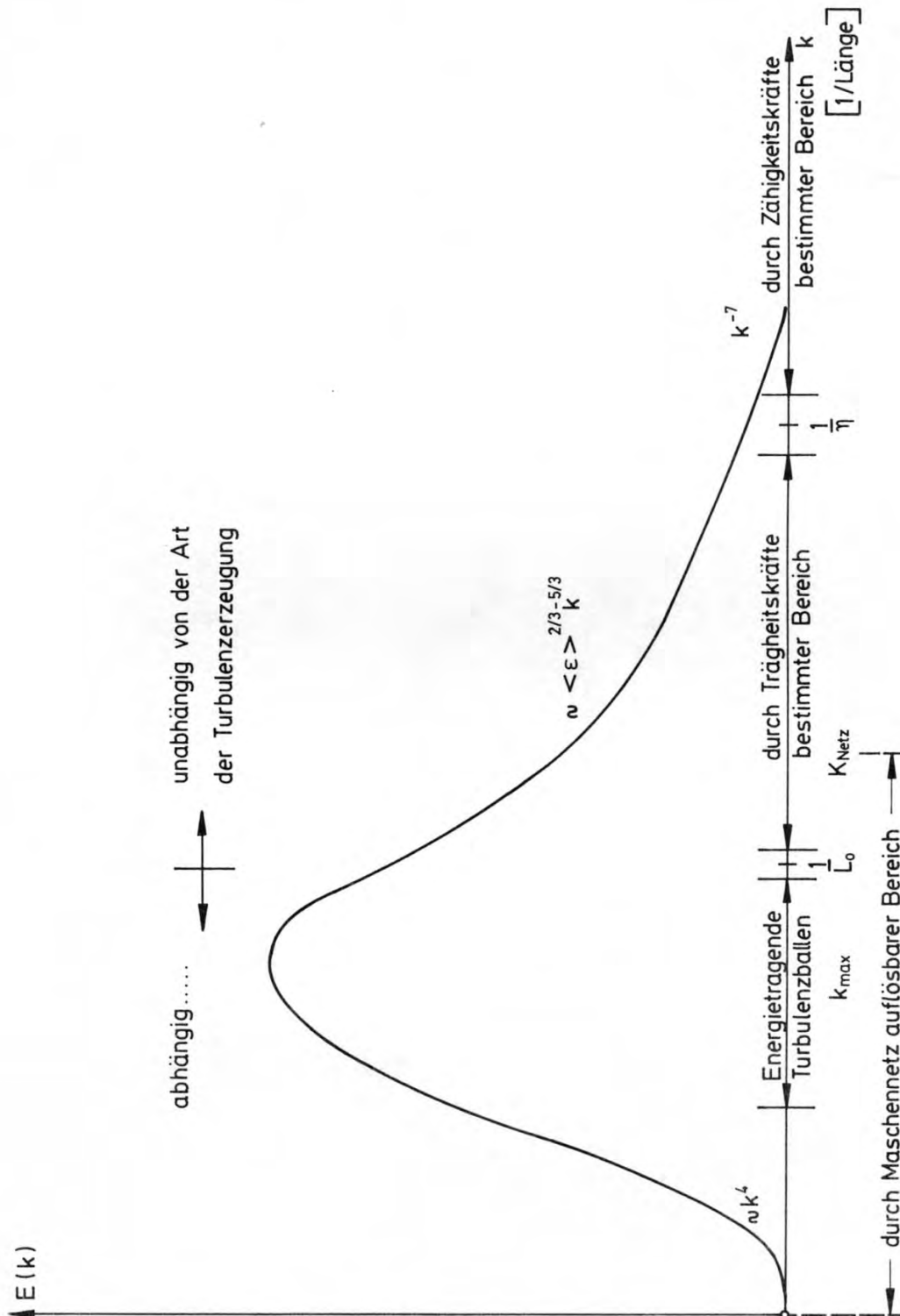


Abb.6: Prinzipieller Verlauf des Energiespektrums isotroper Turbulenz bei großen Reynolds-Zahlen

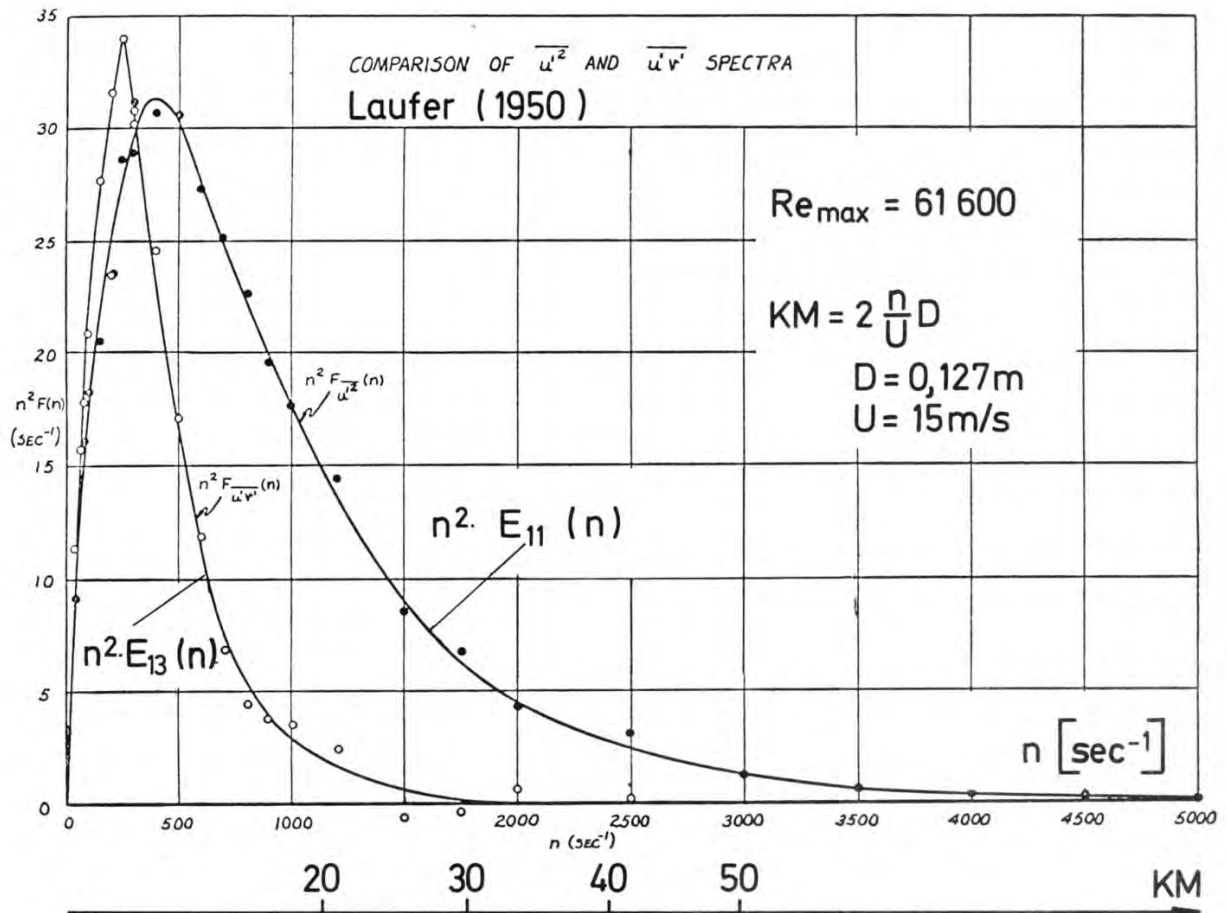


Abb.7: Zur Abschätzung der erforderlichen Maschenzahl KM für die Zulässigkeit der Lokal isotropie-Annahme aus den Messwerten von Laufer [77]

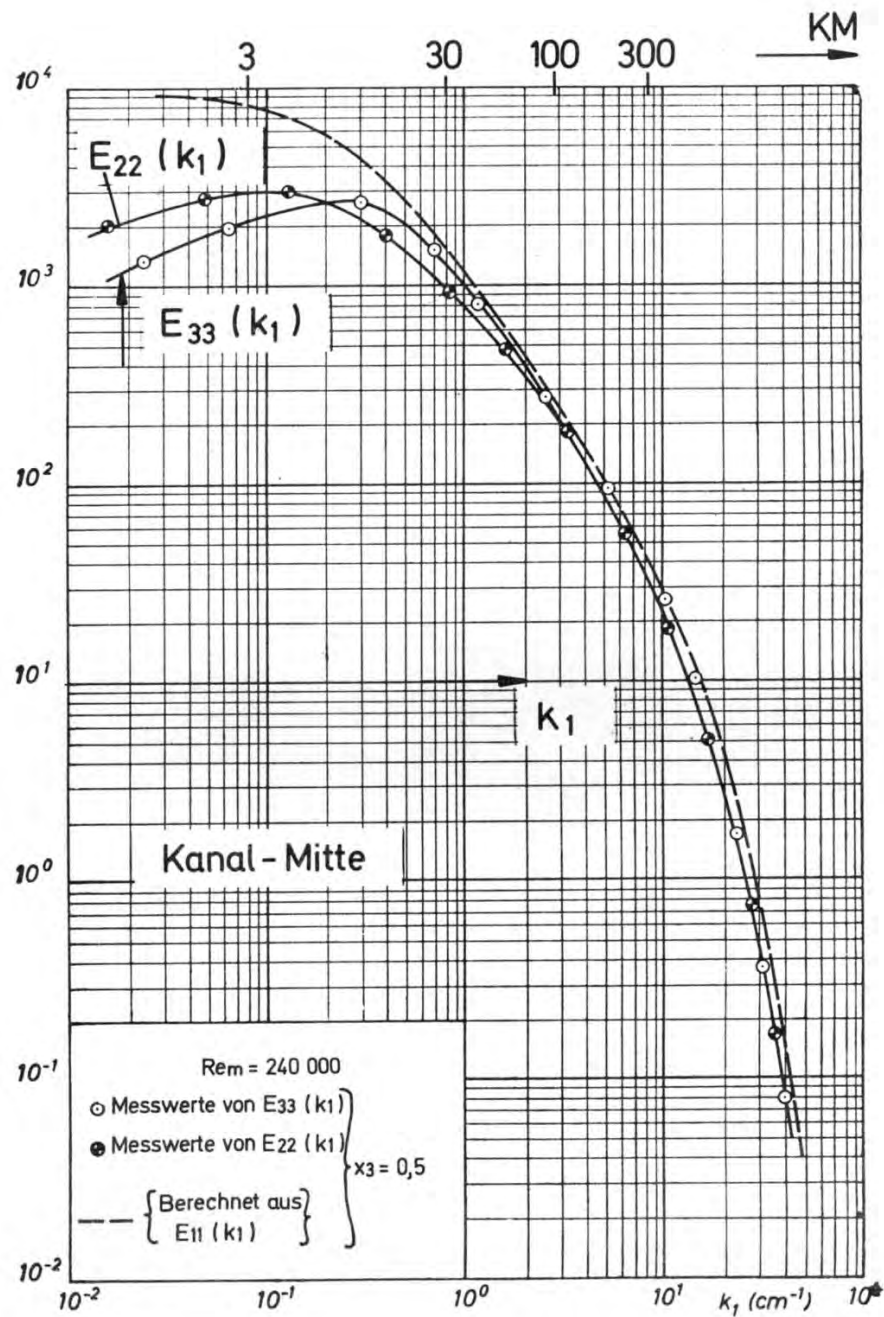


Abb.8: Zur Abschätzung der erforderlichen Maschenzahl KM für die Zulässigkeit der Lokalisotropie-Annahme aus den Messwerten von Comte-Bellot [18] für Kanal-Mitte ($x_3=0.5$)

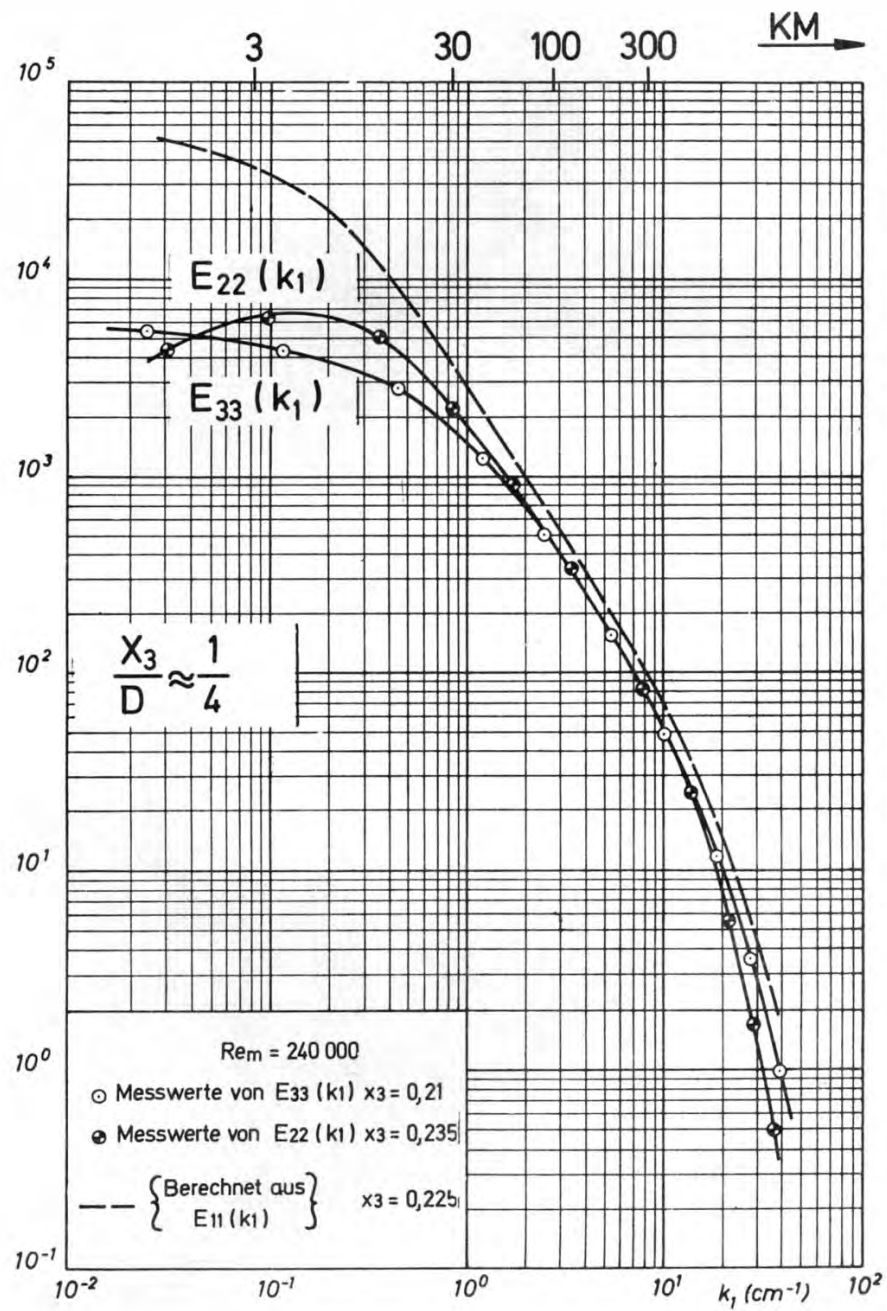


Abb.9: Zur Abschätzung der erforderlichen Maschenzahl KM für die Zulässigkeit der Lokalisotropie-Annahme aus den Messwerten von Comte-Bellot [18] für $x_3=1/4$

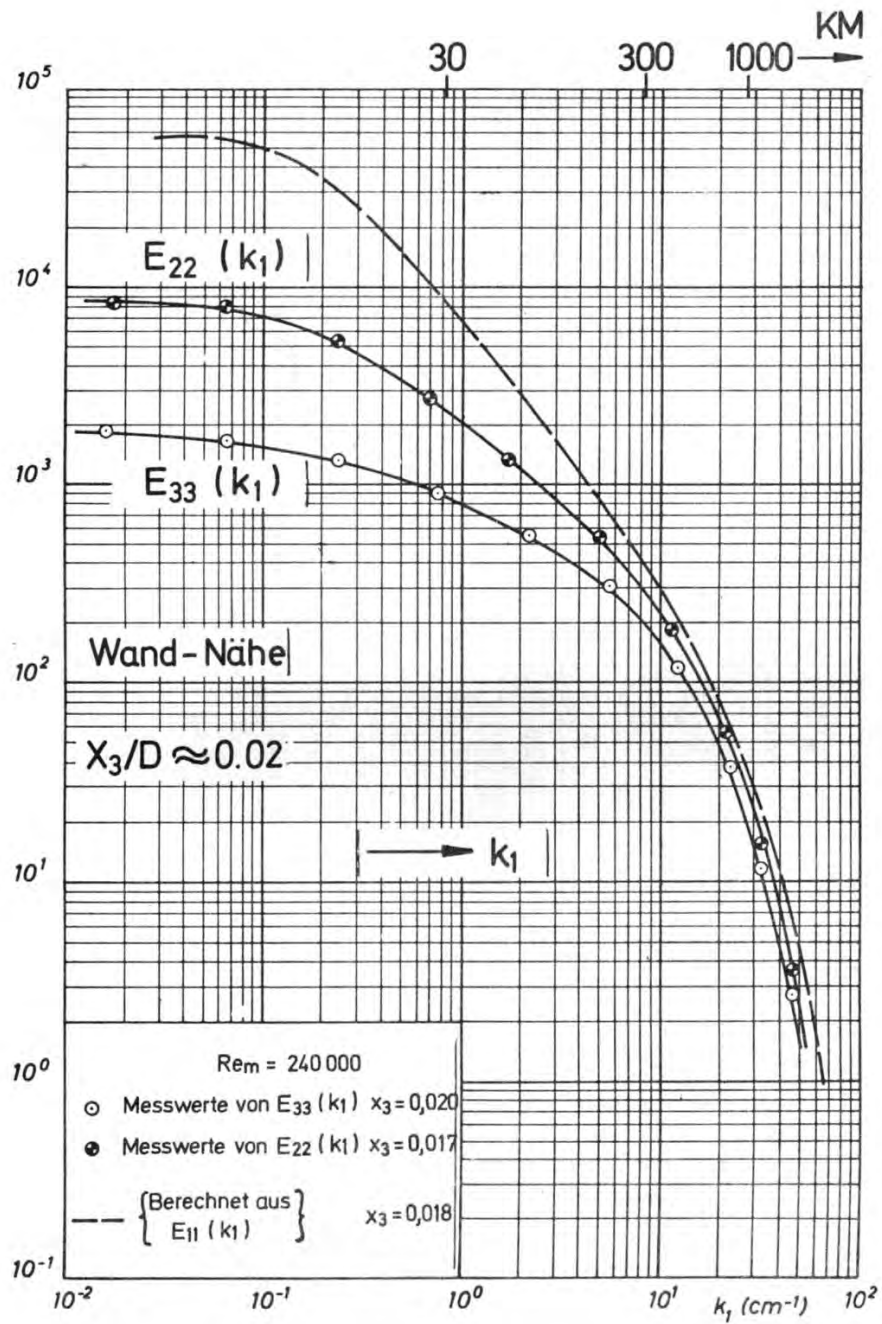


Abb.10: Zur Abschätzung der erforderlichen Maschenzahl KM für die Zulässigkeit der Lokalisotropie-Annahme aus den Messwerten von Comte-Bellot [18] für Wand-Nähe ($x_3=0,02$)

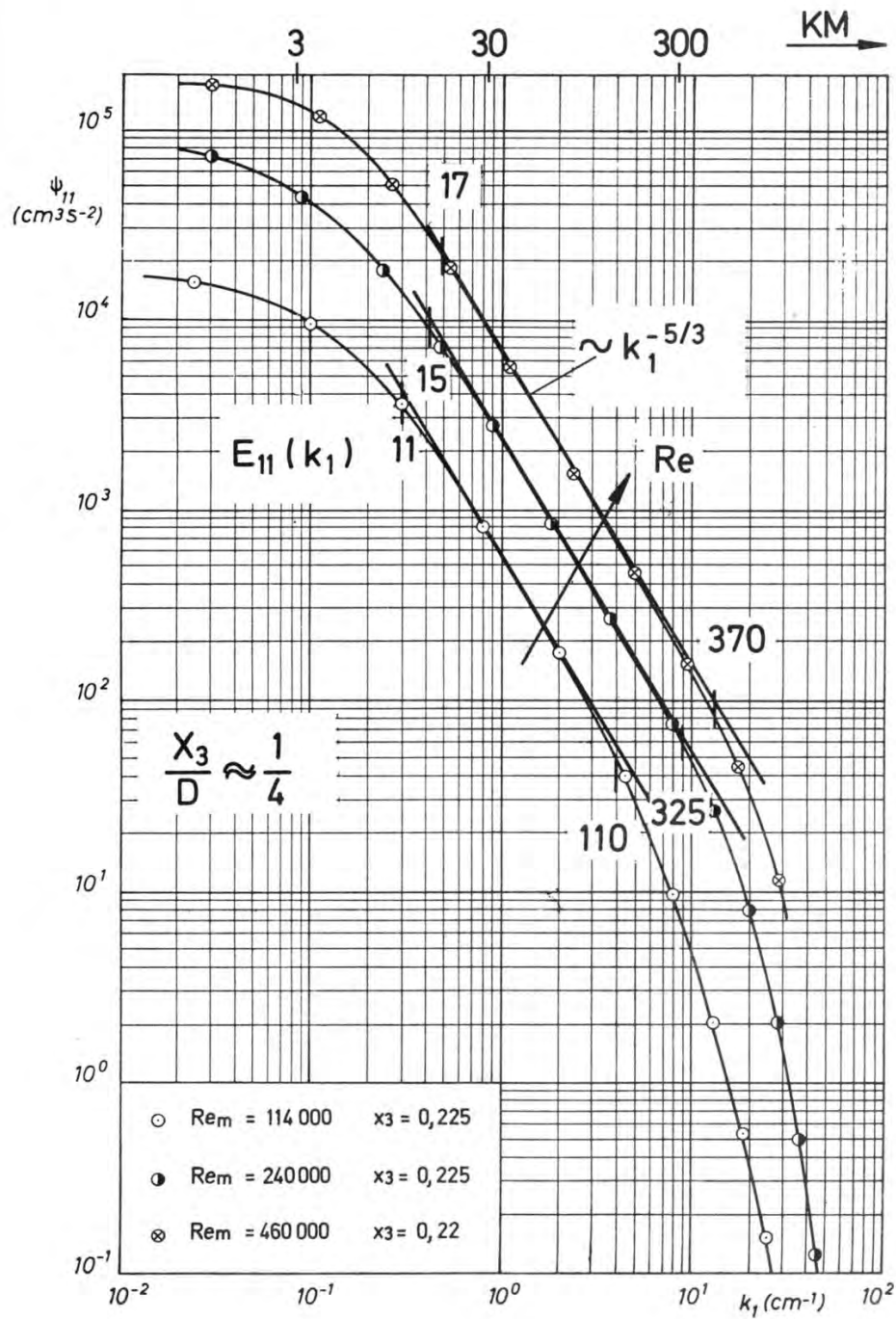


Abb.11: Über den Gültigkeitsbereich des Kolmogorov-Spektrums aufgrund der Messwerte von Comte-Bellot [18] für $x_3=1/4$

Abb.12: Zulässiger Zeitschritt Δt als Funktion der Zähigkeit μ mit der Konvektionsgeschwindigkeit V_x als Parameter für Differenzenformeln Typ a)

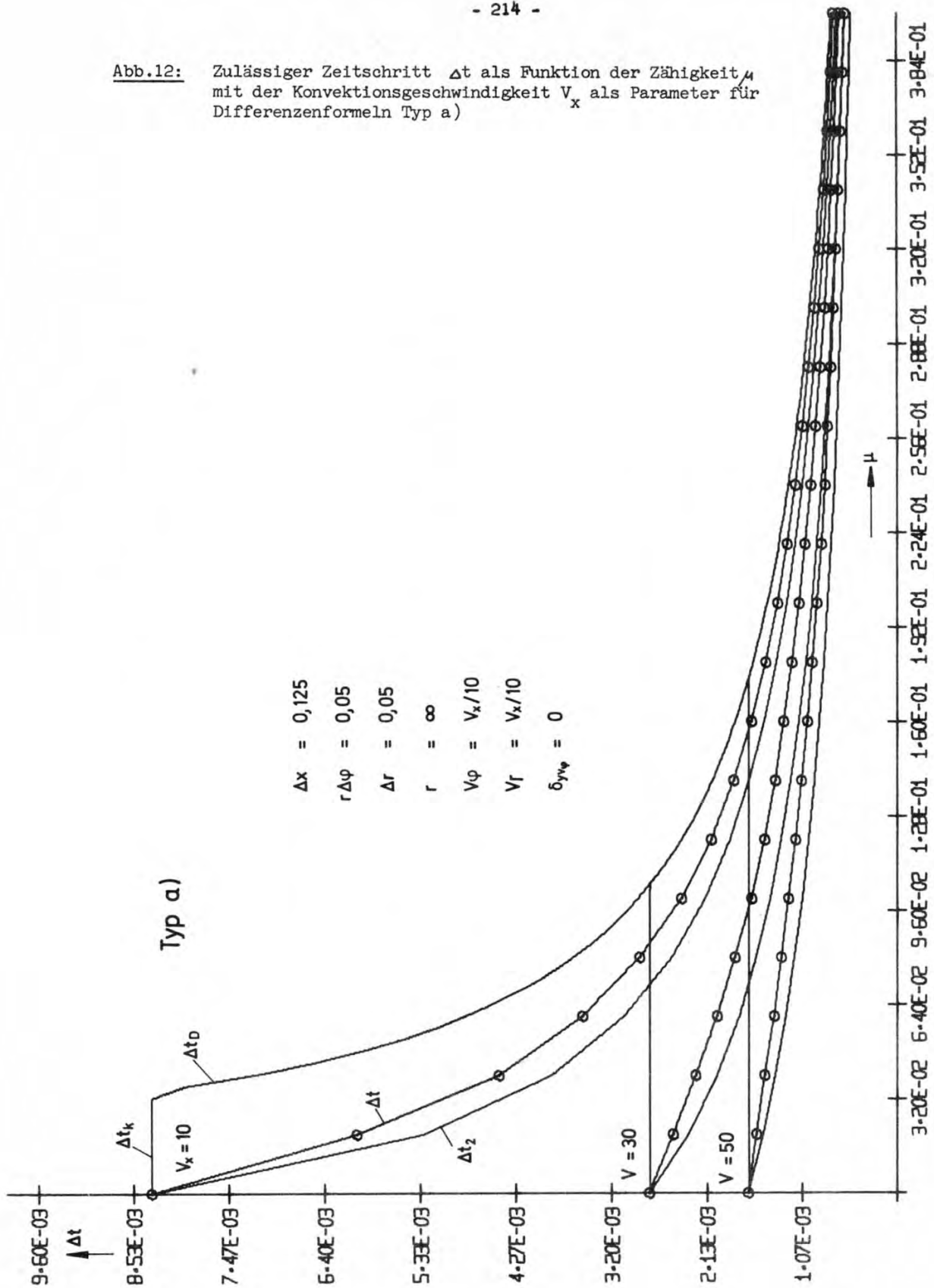


Abb.13: Zulässiger Zeitschritt Δt als Funktion der Zähigkeit μ mit der Konvektionsgeschwindigkeit V_x als Parameter für Differenzenformeln Typ b) (sonstige Parameter wie in Abb.12)

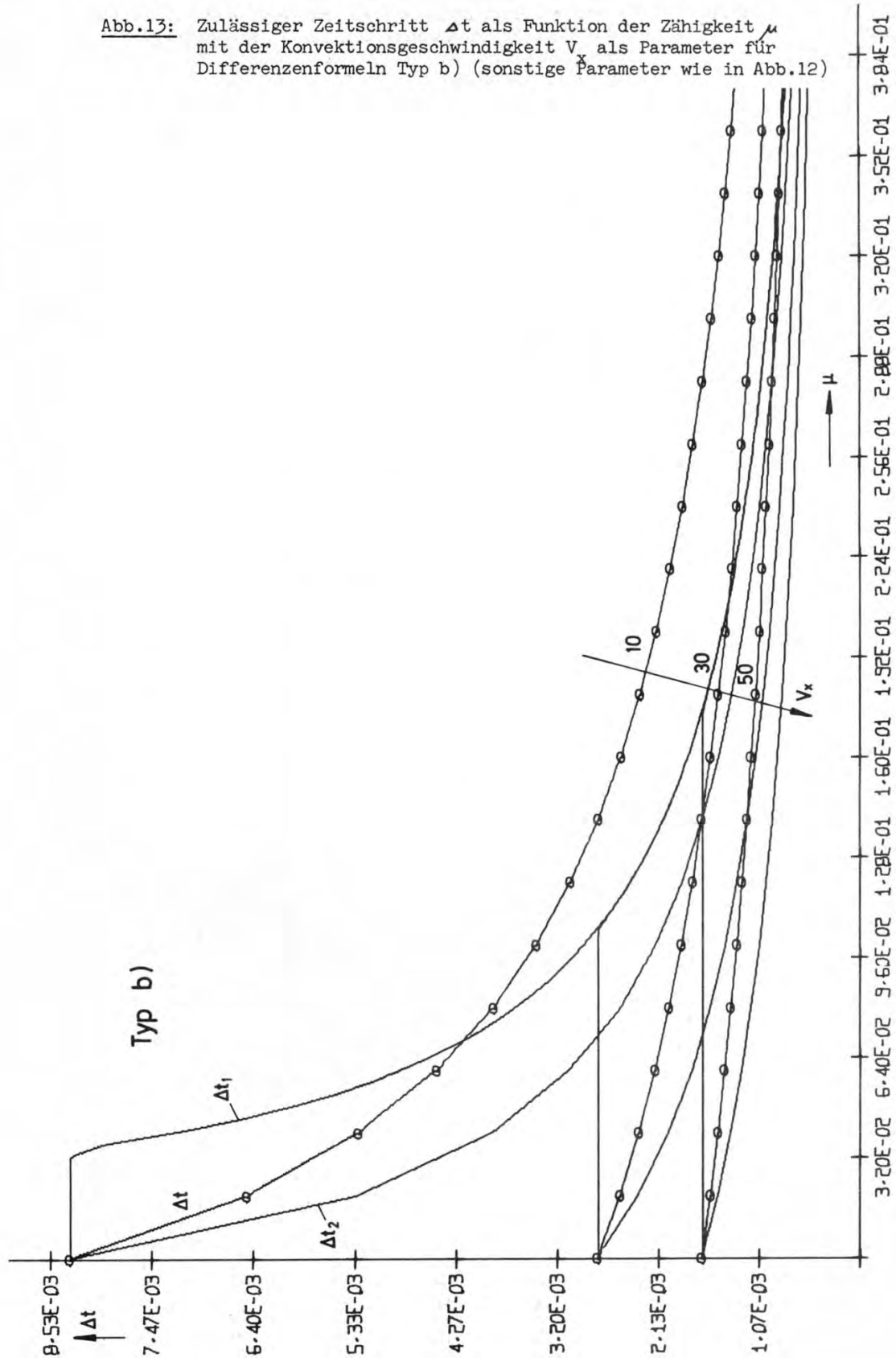
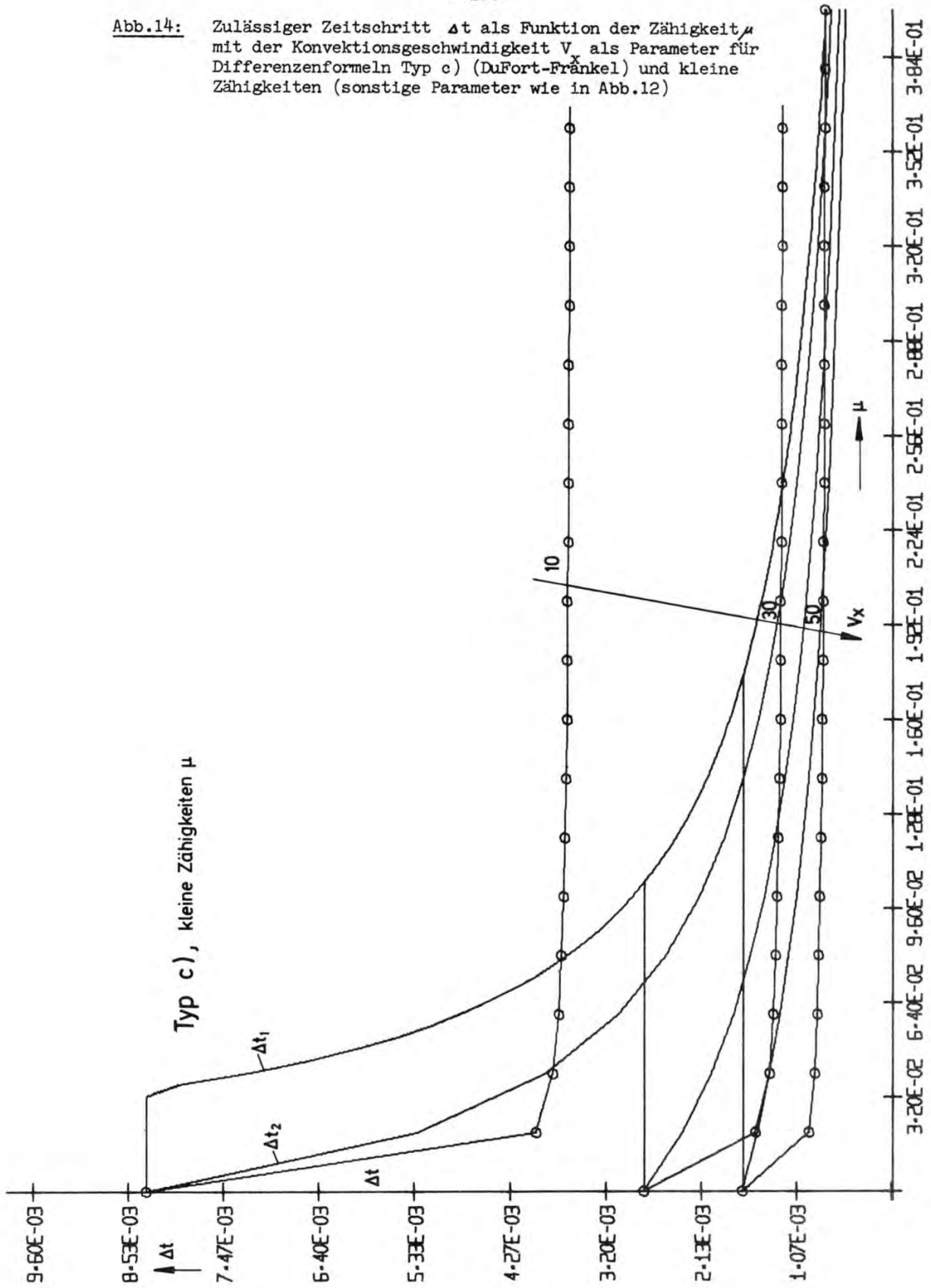


Abb.14: Zulässiger Zeitschritt Δt als Funktion der Zähigkeit μ mit der Konvektionsgeschwindigkeit V_x als Parameter für Differenzenformeln Typ c) (DuFort-Fränkel) und kleine Zähigkeiten (sonstige Parameter wie in Abb.12)



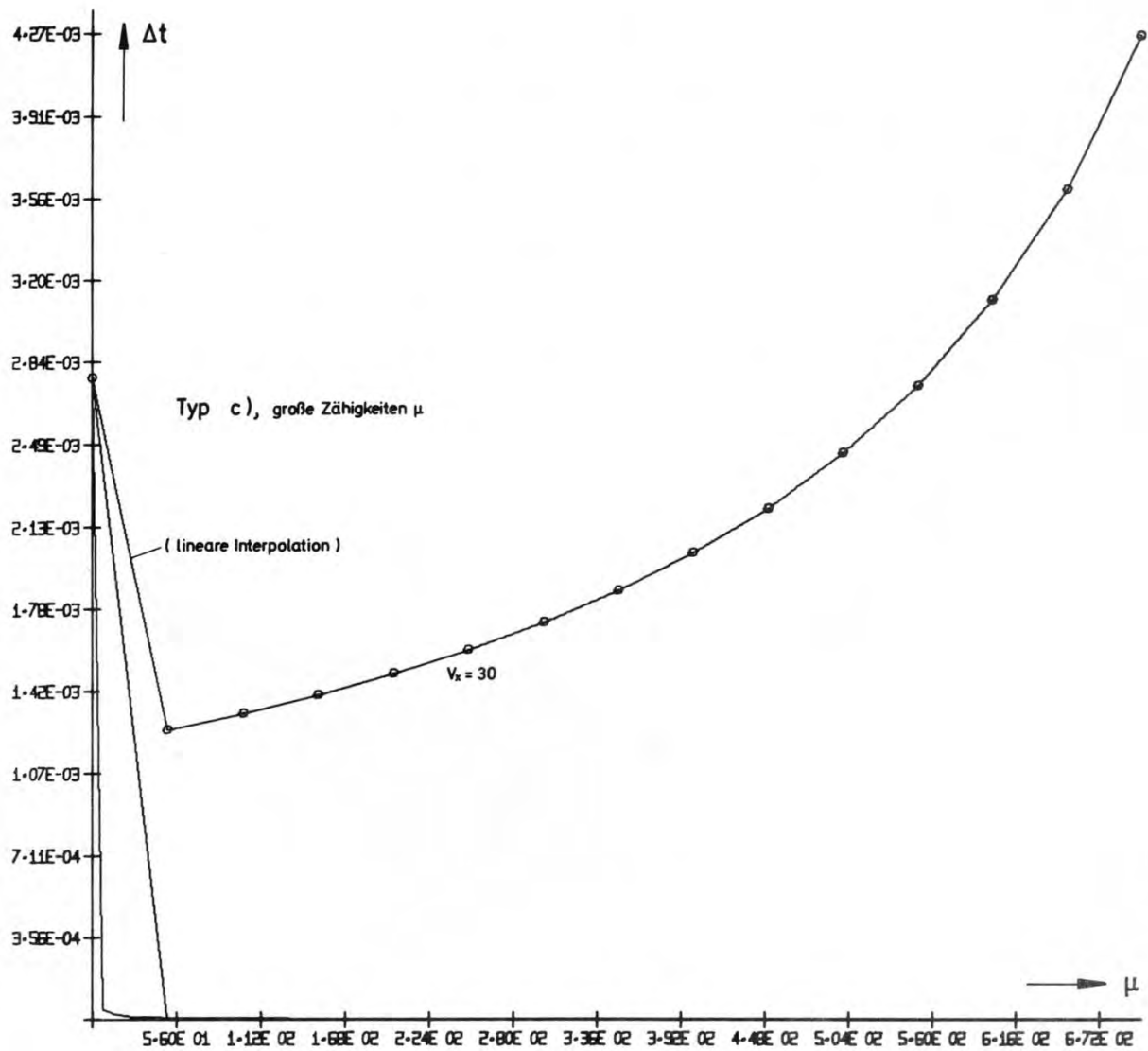


Abb.15: Zulässiger Zeitschritt Δt als Funktion der Zähigkeit μ für Differenzenformeln Typ c) (DuFort-Frankel) und große Zähigkeiten (sonstige Parameter wie in Abb.12)

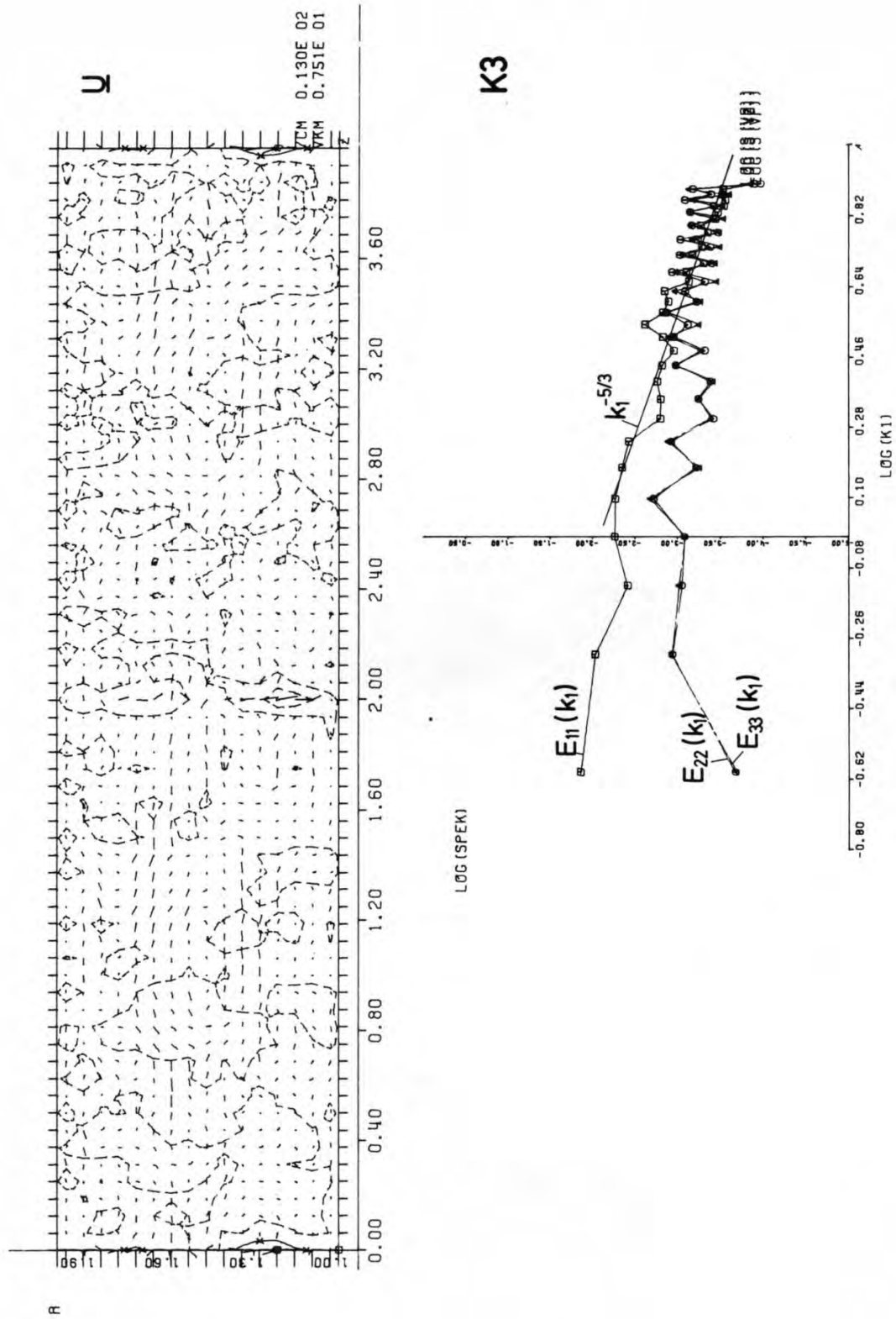


Abb.16: Anfangswerte des Geschwindigkeitsfeldes $(\underline{u} - \langle \underline{u} \rangle)$ in x_3-x_1 -Ebene sowie zugehörige Energiespektren.

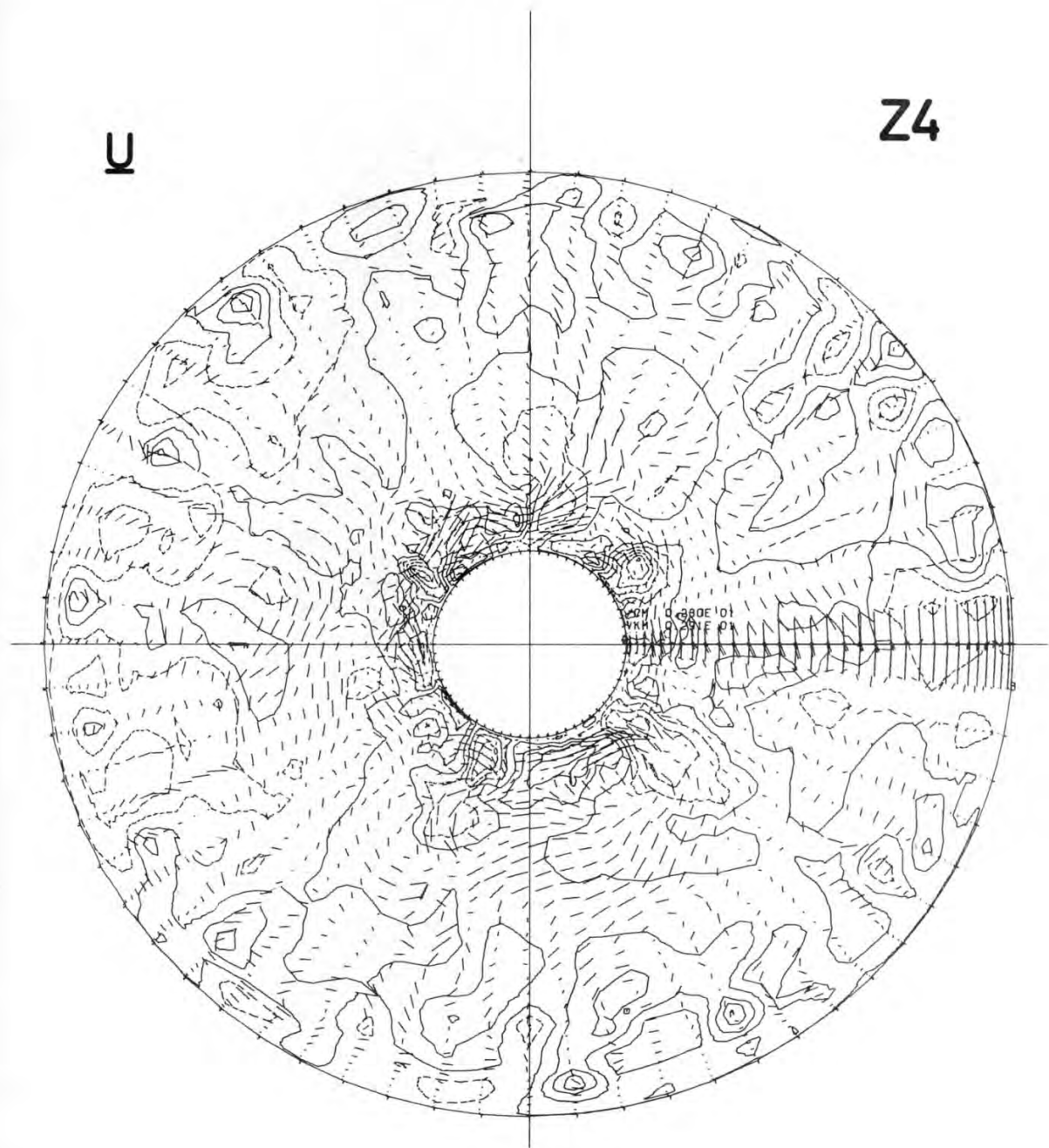


Abb.17: Turbulentes Geschwindigkeitsfeld in einem Ringspalt: ($u - \langle u \rangle$)

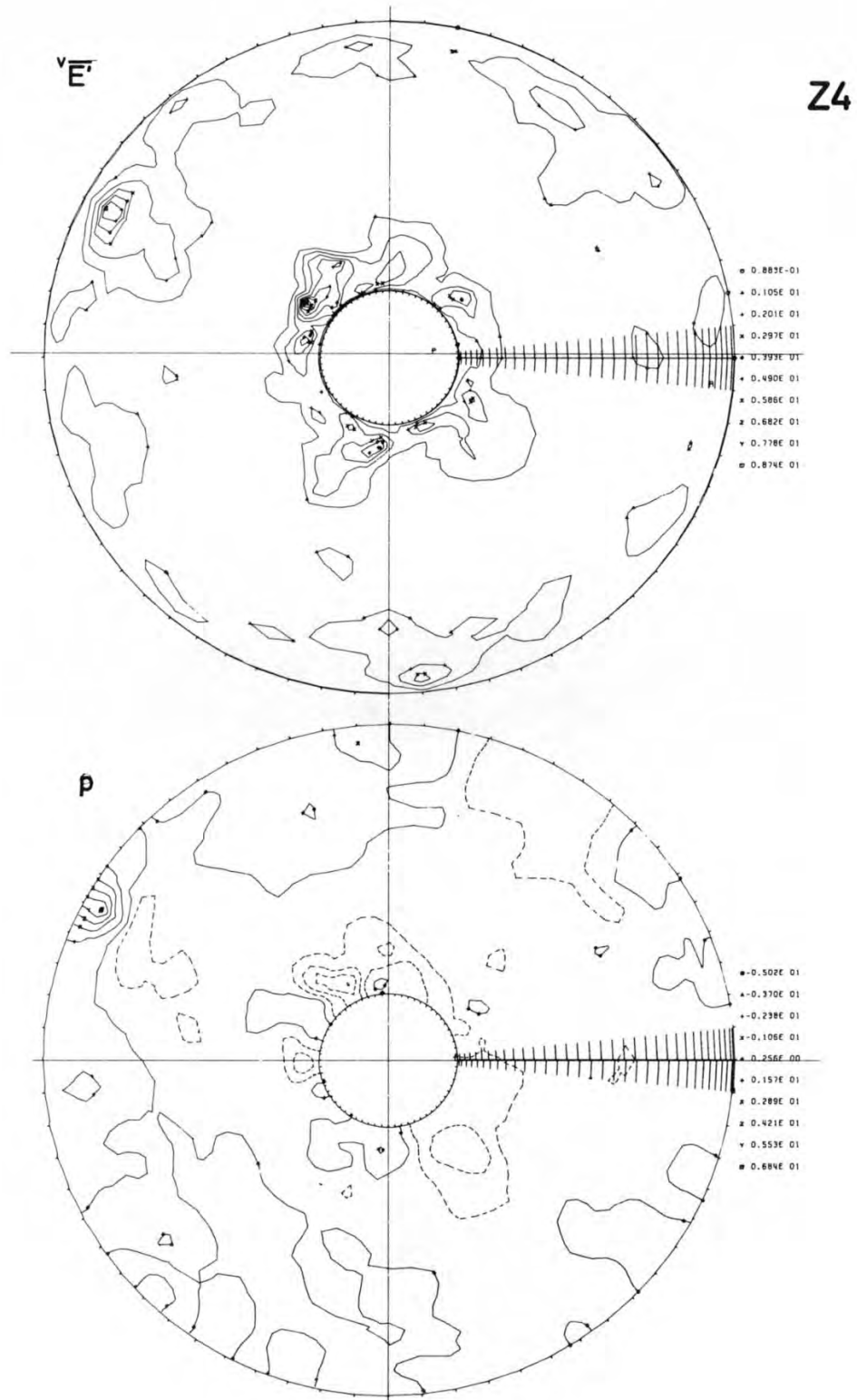


Abb.18: Kinetische Energie der Feinstruktur vE und Druck p in einem Ringspalt

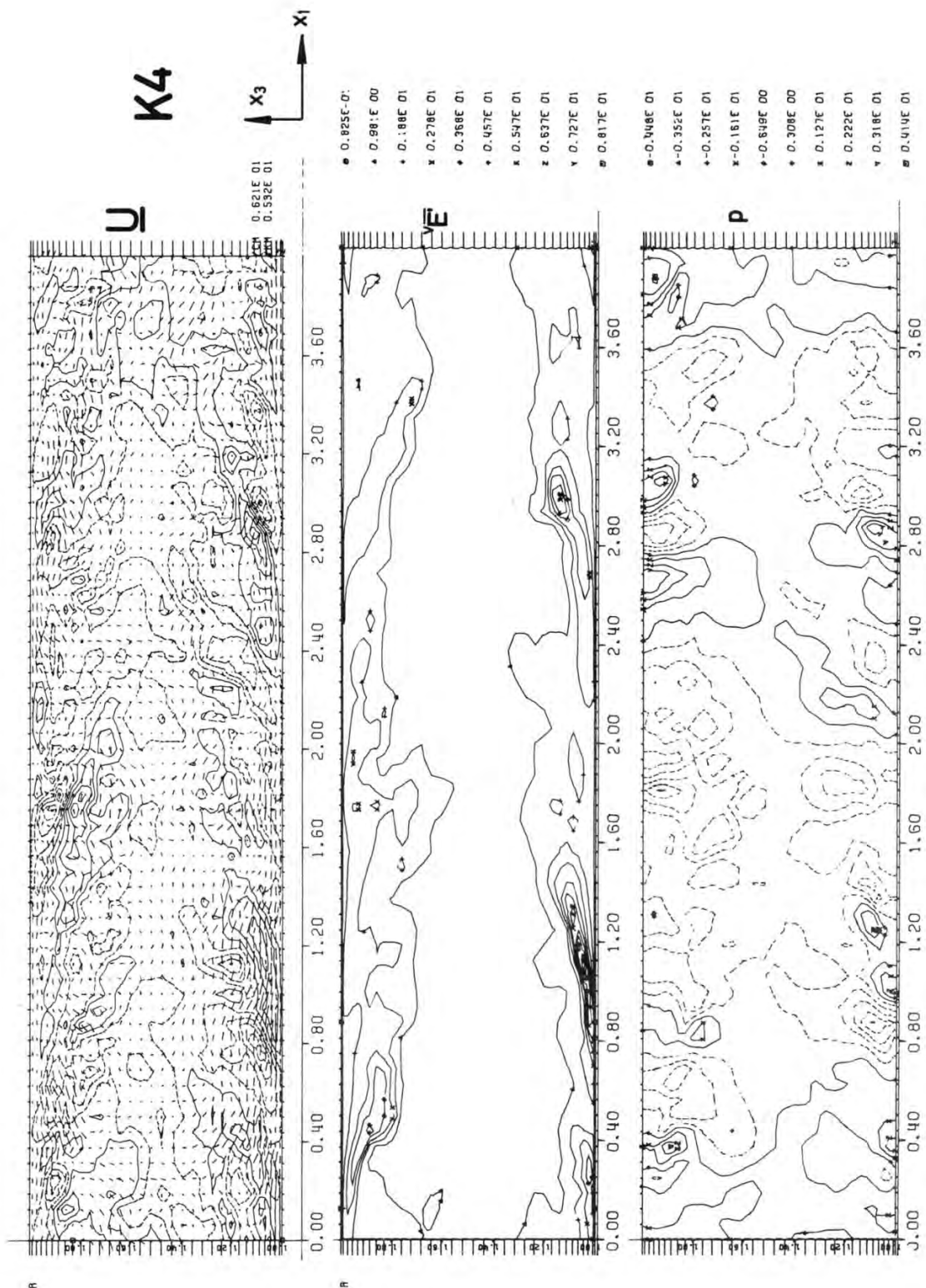


Abb.19: Turbulentes Geschwindigkeitsfeld ($\underline{u} - \langle \underline{u} \rangle$) kinetische Energie der Feinstruktur $\overline{E'}^2$ und Druck p in der x_3 - x_1 -Ebene eines Plattenkanals

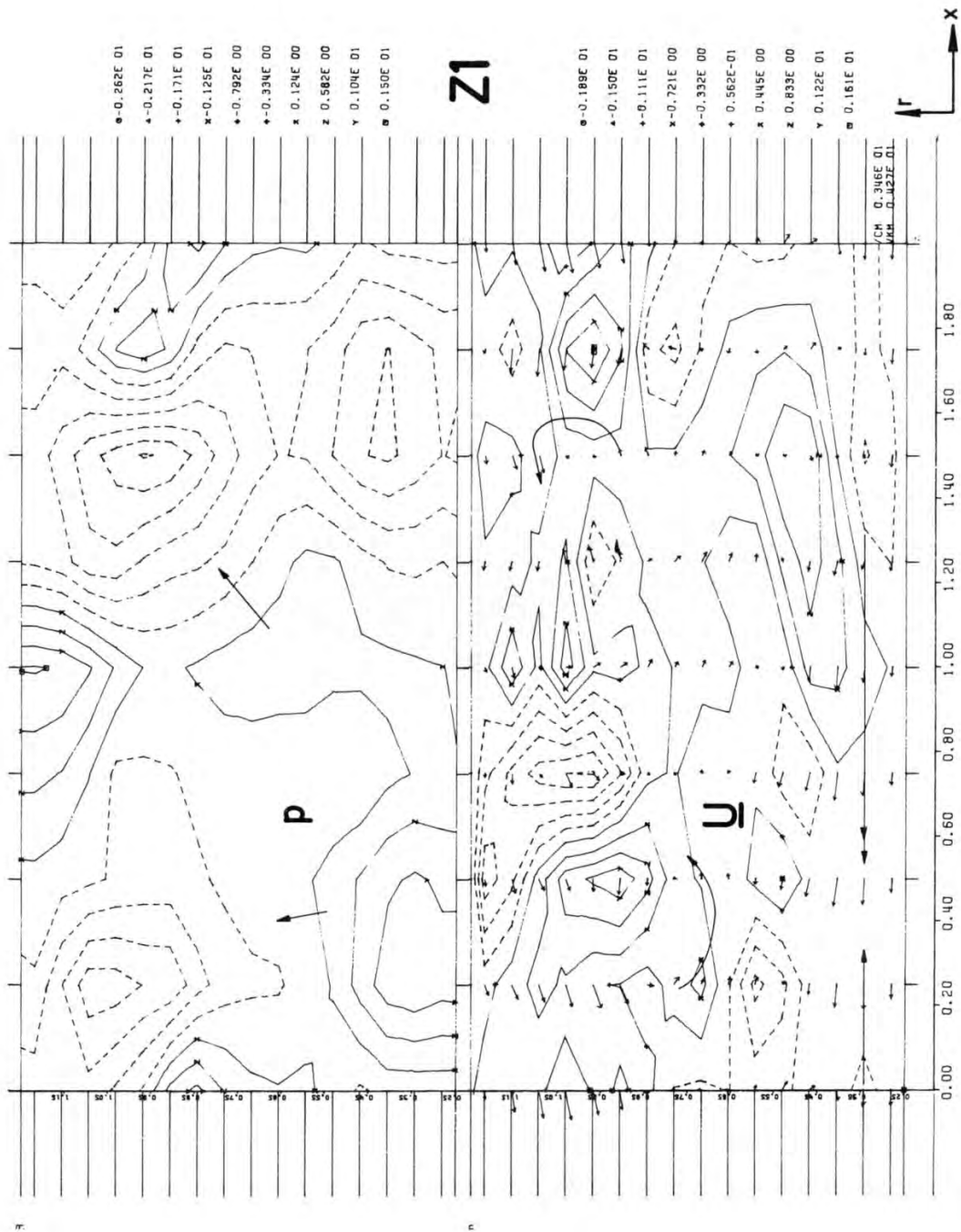


Abb.20: Turbulentes Druckfeld p und Geschwindigkeitsfeld (u - $\langle u \rangle$) in der r - x -Ebene eines Ringspaltes

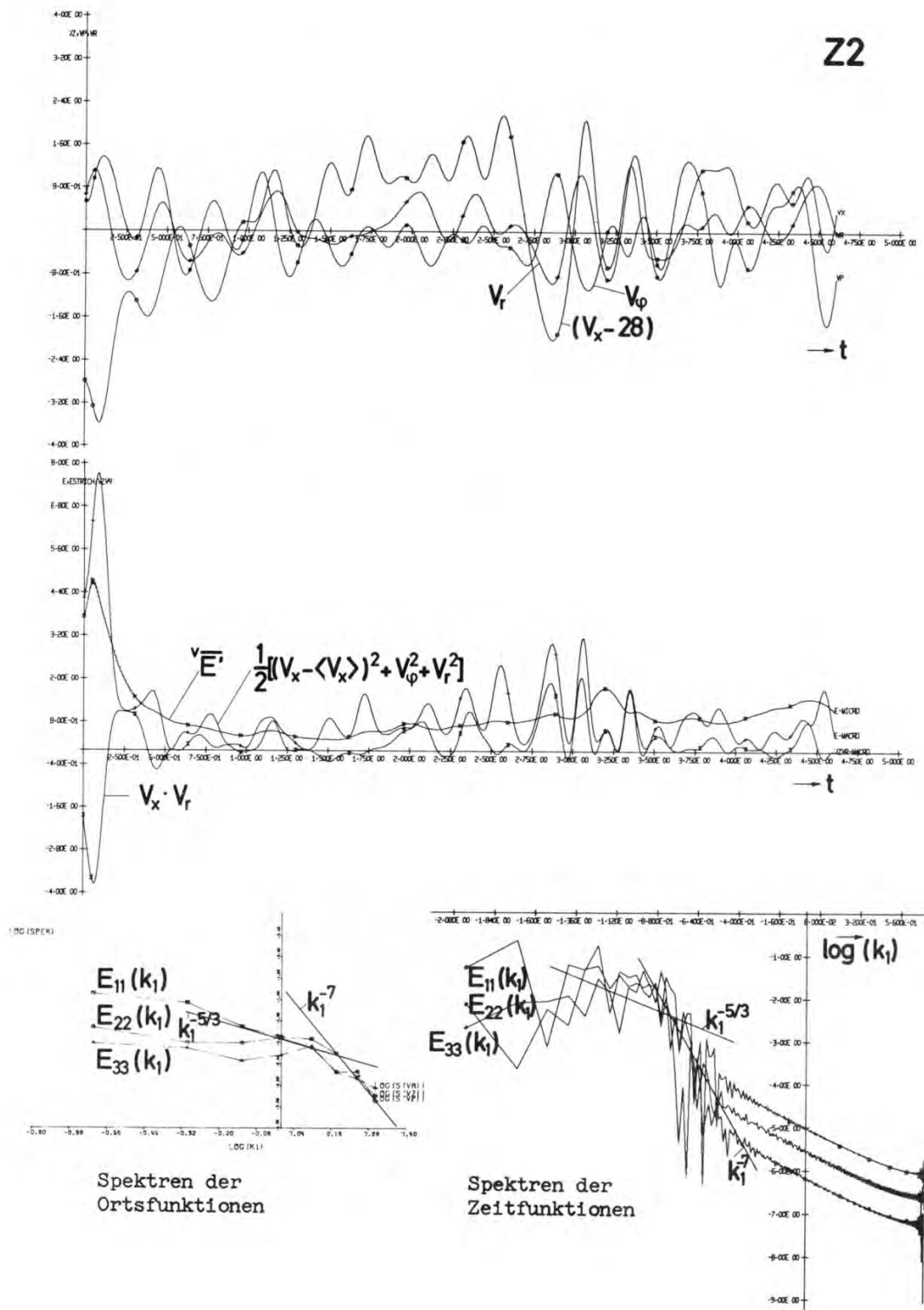


Abb.21: Turbulente Schwankungen der Grobstruktur als Funktion der Zeit t an einem Ort bei $r=0.844$ sowie Gegenüberstellung entsprechender räumlicher und zeitlicher Energiespektren

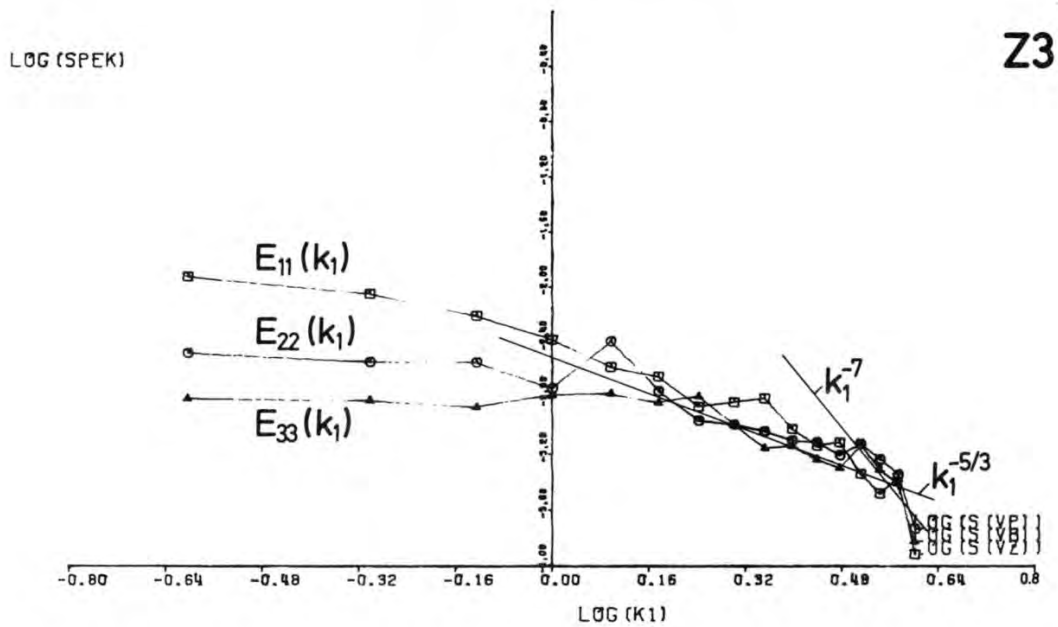
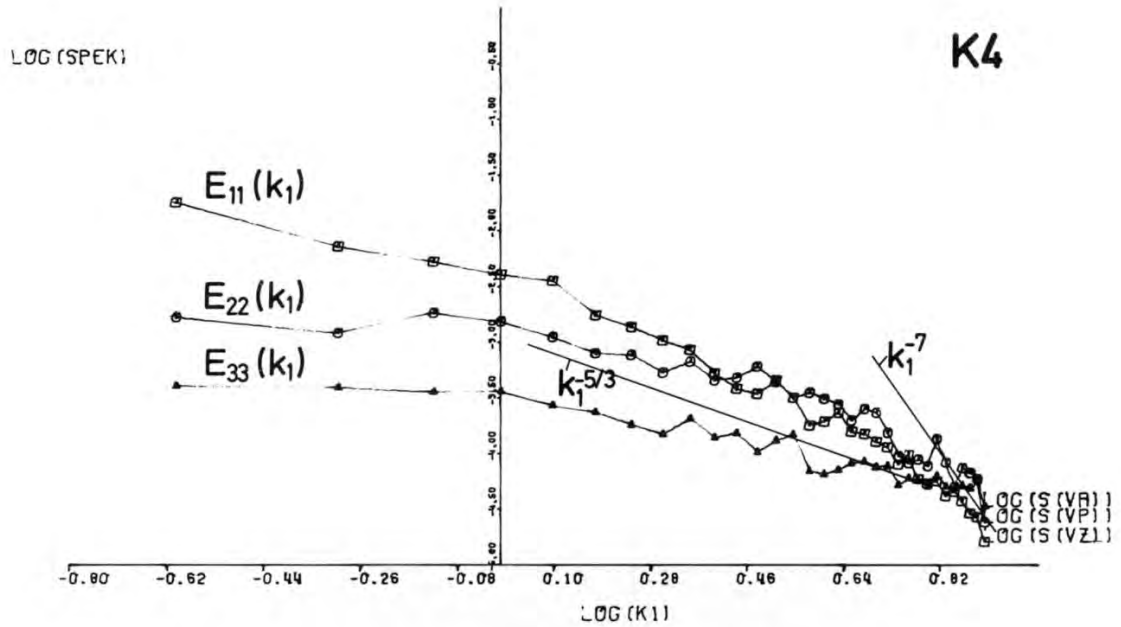


Abb.22: Energiespektren der Geschwindigkeitsschwankungen als Funktion der axialen Koordinate, gemittelt über die zur Wand parallelen Ebene bei $x_3=0.07$ bzw. $r=0.47$ für Platte bzw. Ringspalt

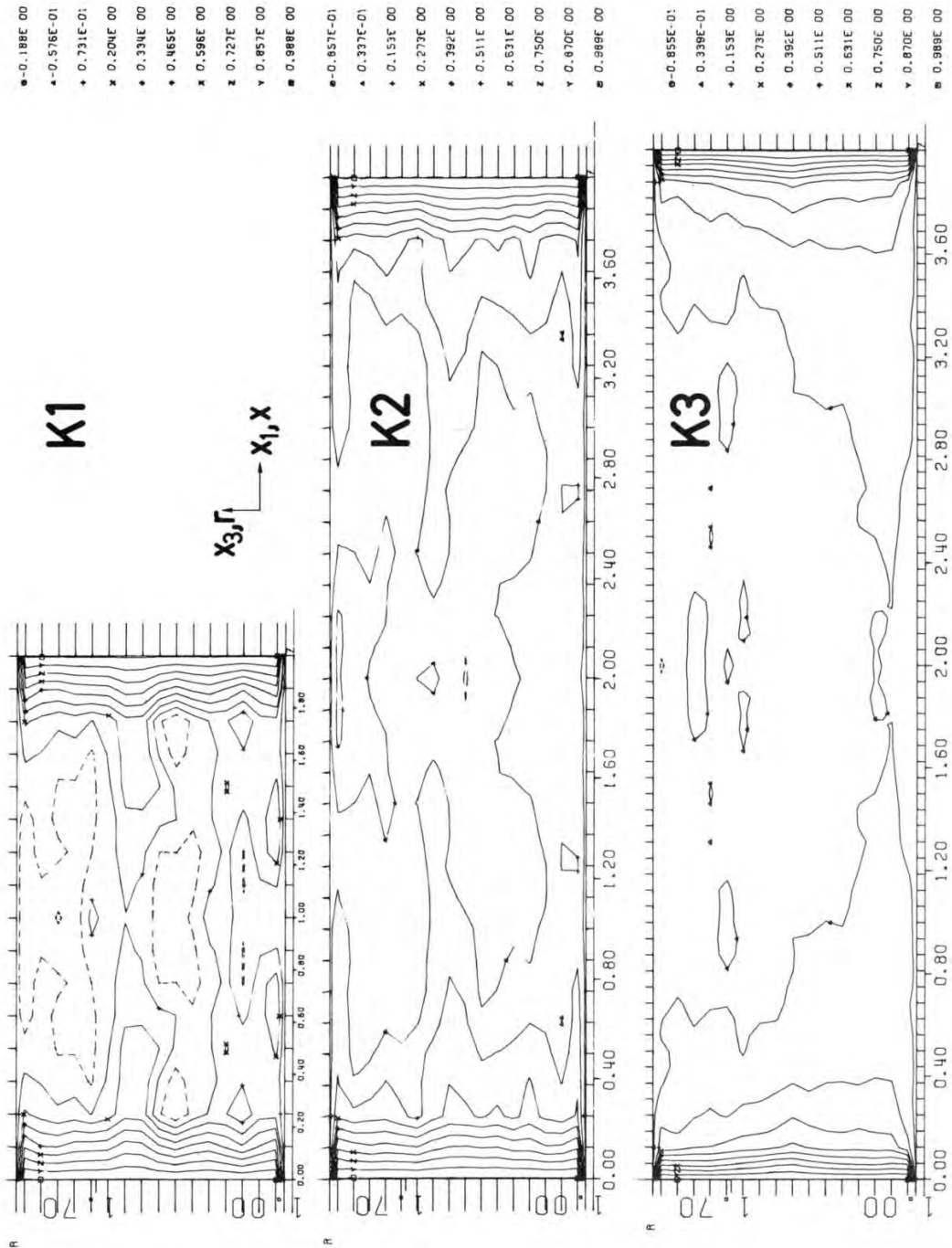


Abb.23: Korrelationen $R_{ii}(x_3, x_1)$ für Plattenströmungen mit unterschiedlichen Periodenlängen und Maschengrößen

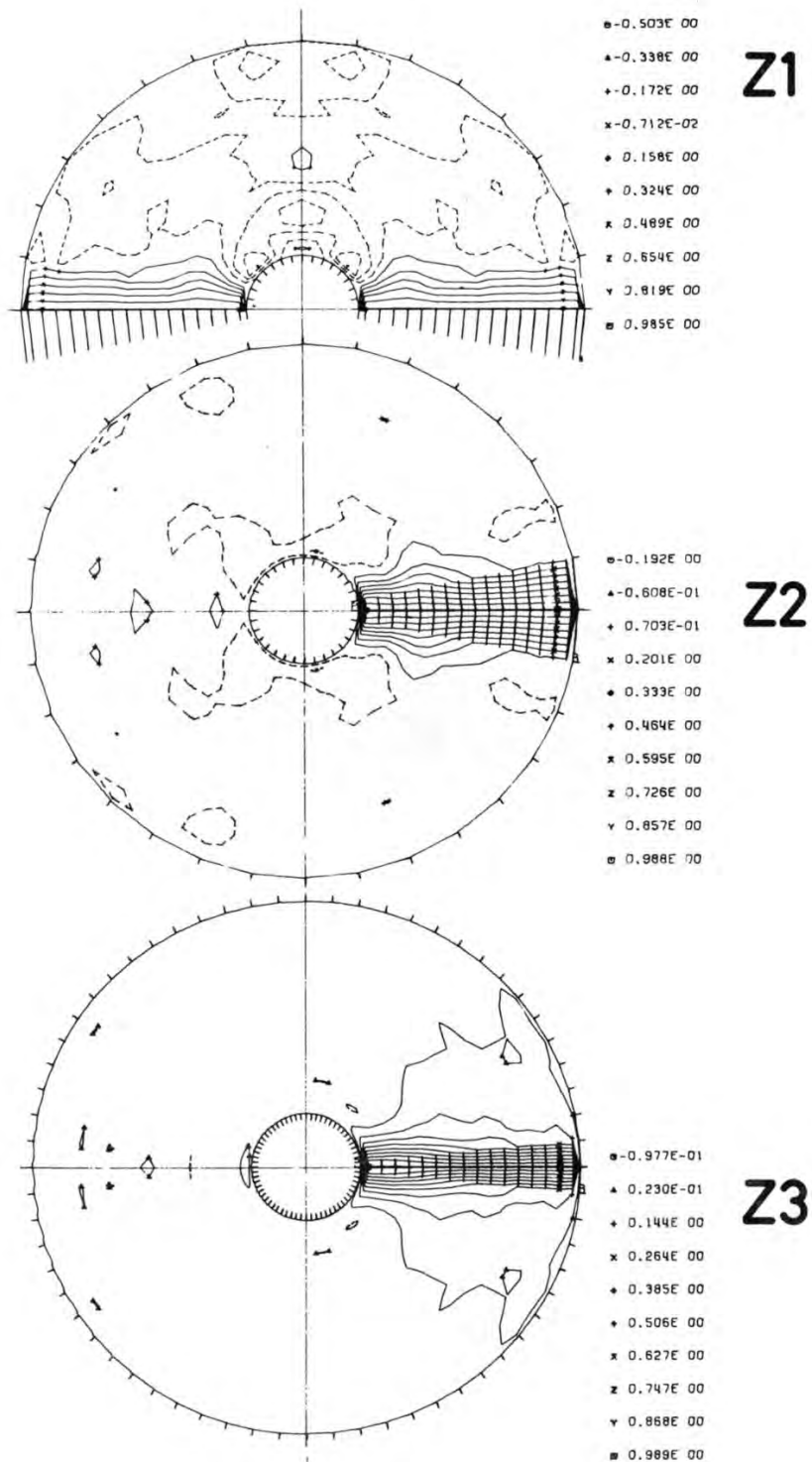


Abb.24: Korrelationen $R_{11}(r, \varphi)$ für Ringspaltströmungen mit unterschiedlichen Periodenlängen und Maschengrößen

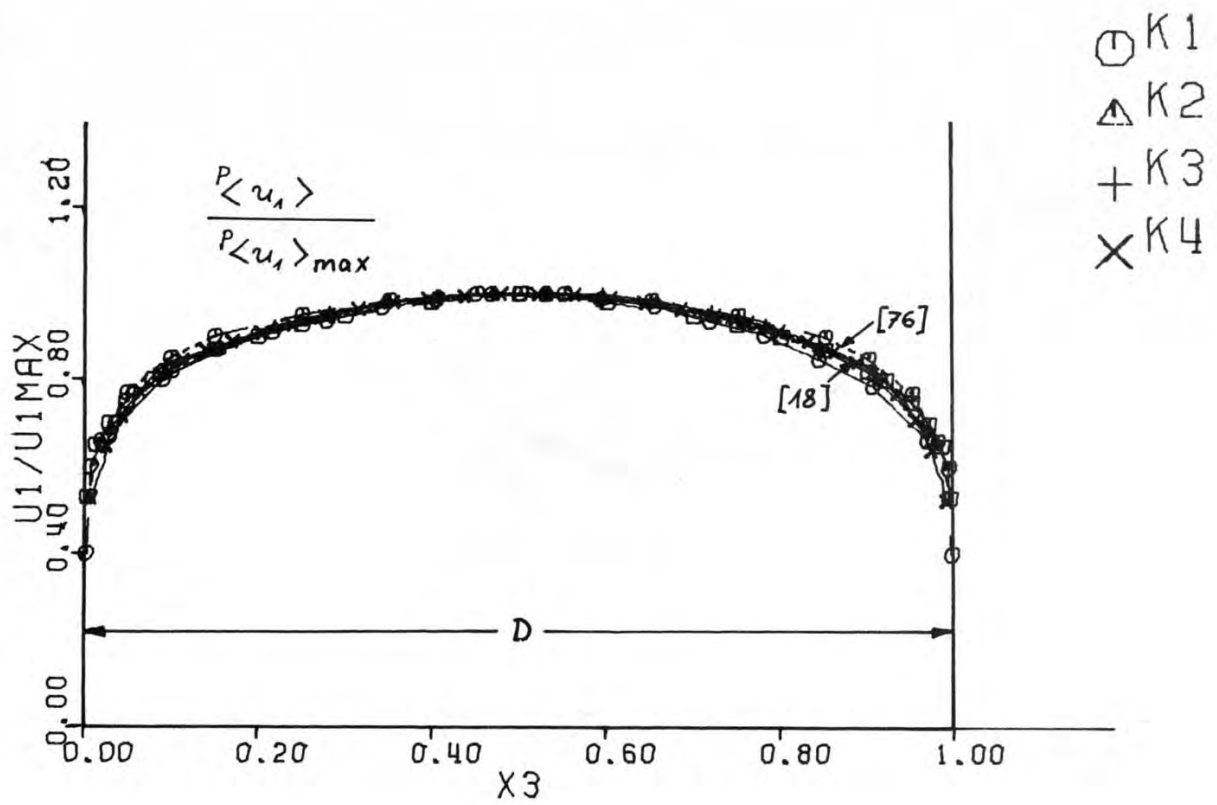


Abb. 26

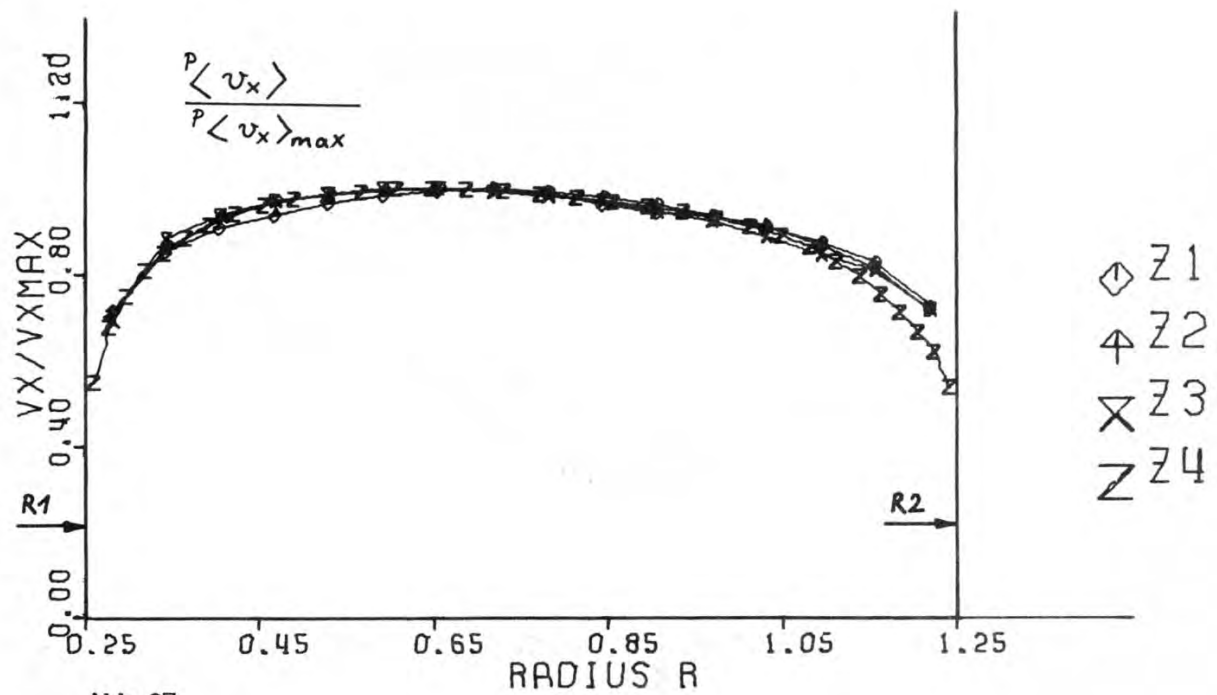


Abb. 27

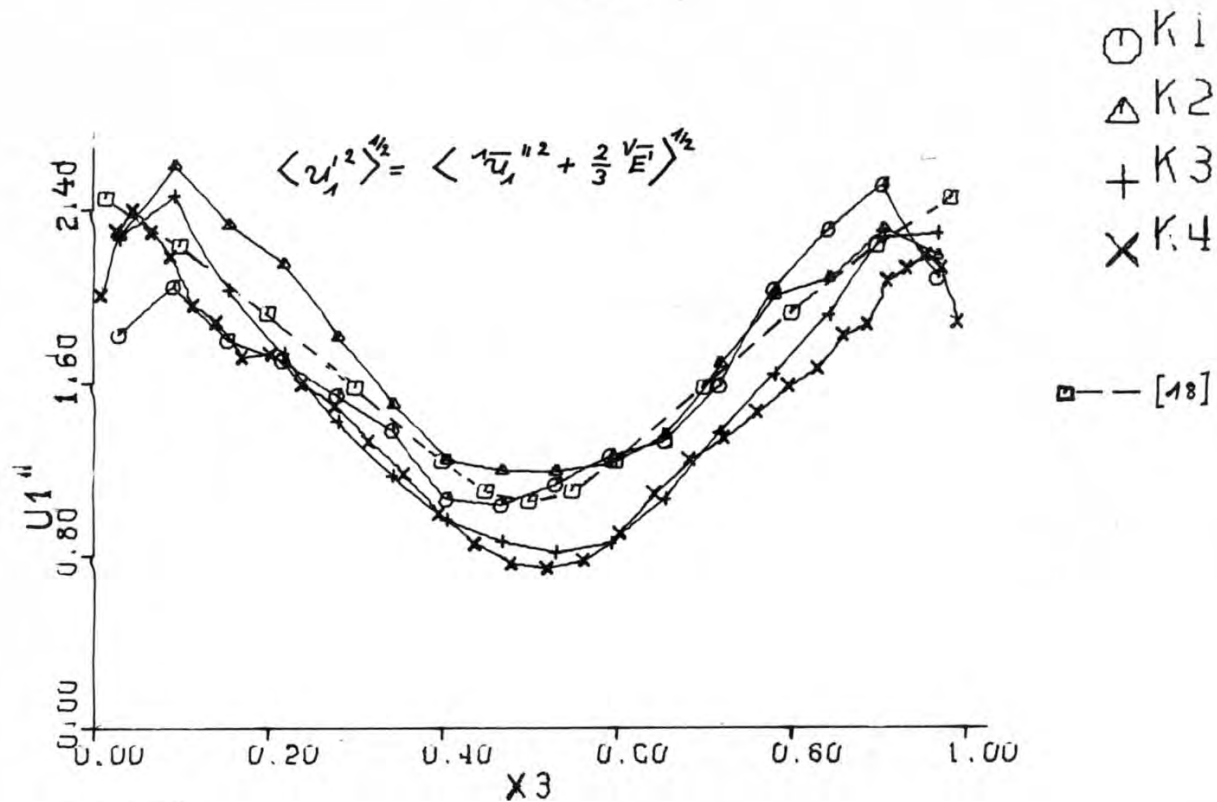


Abb. 28

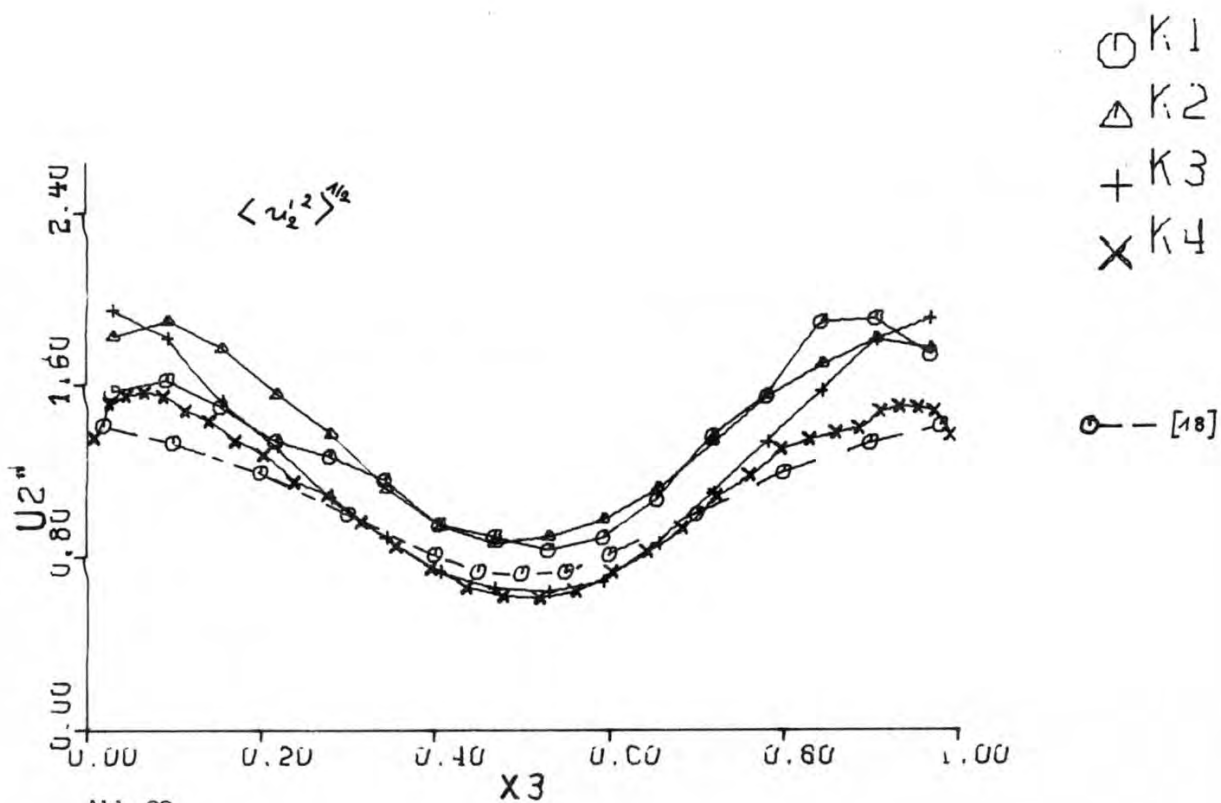
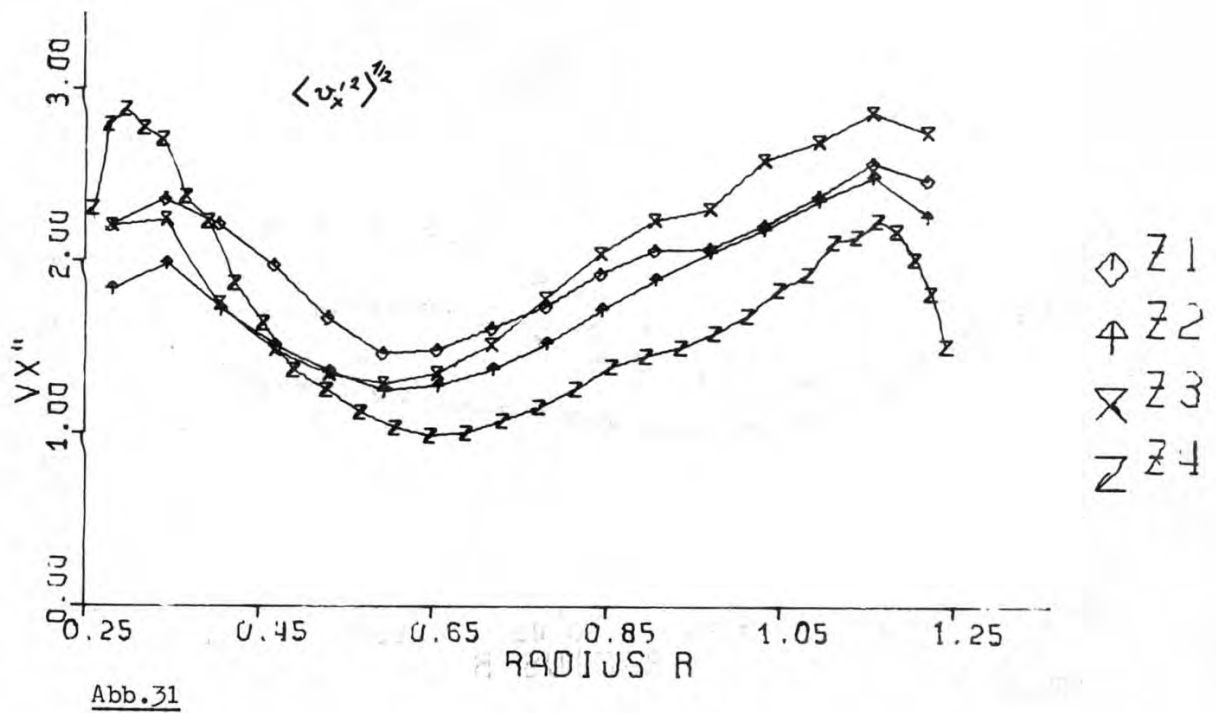
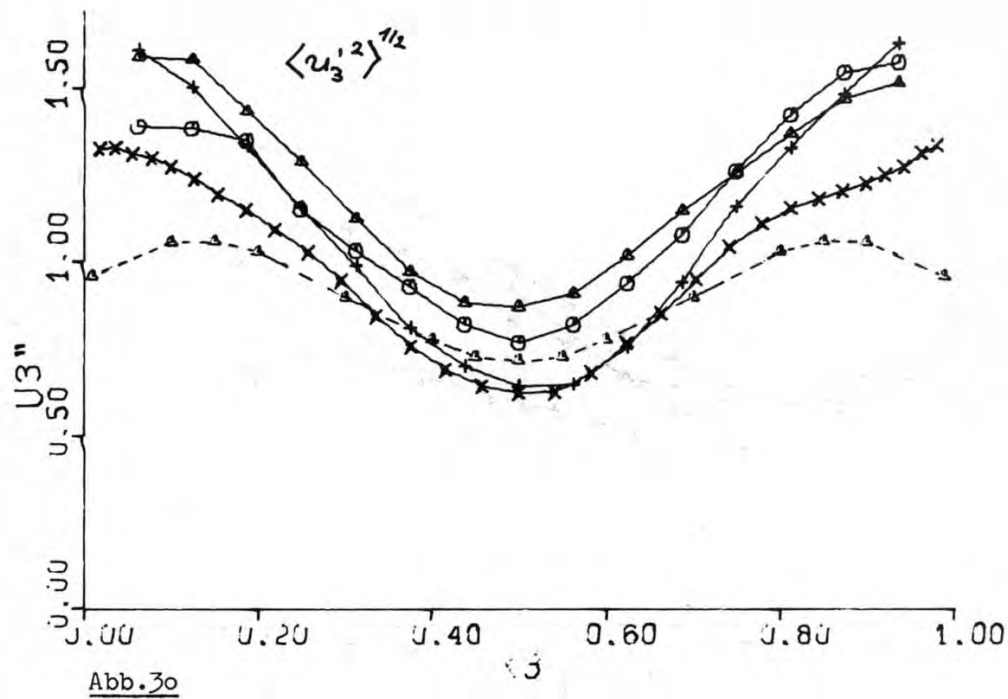
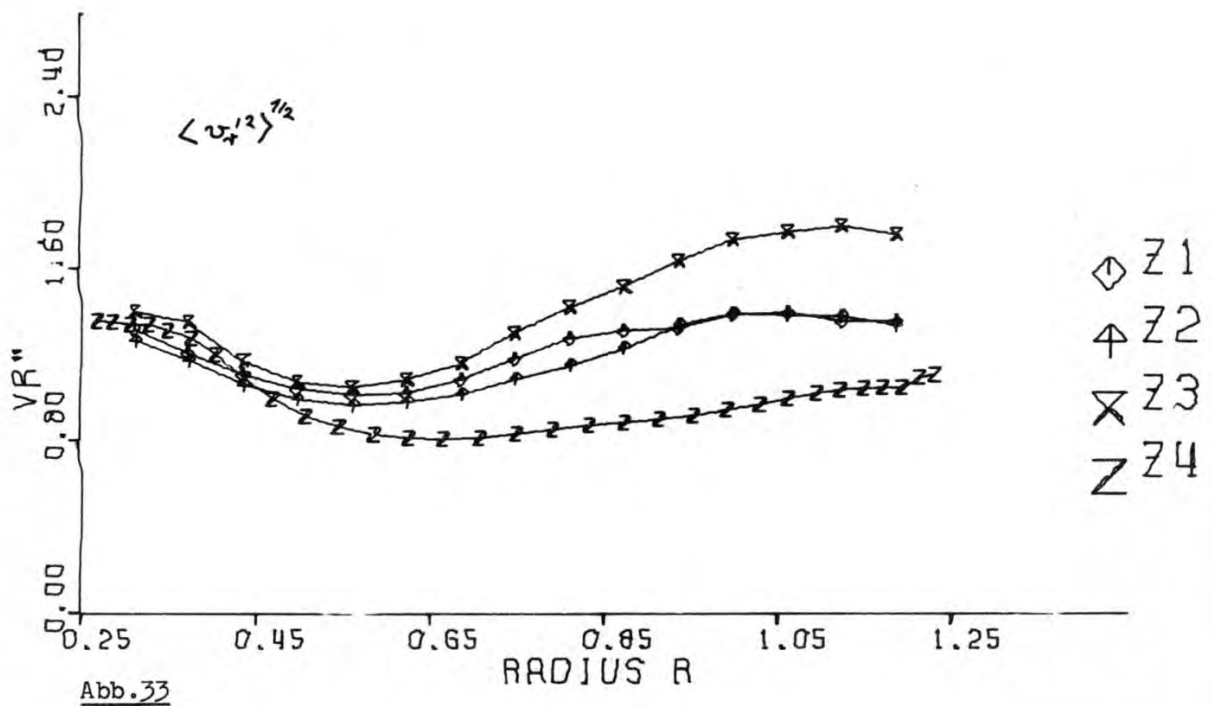
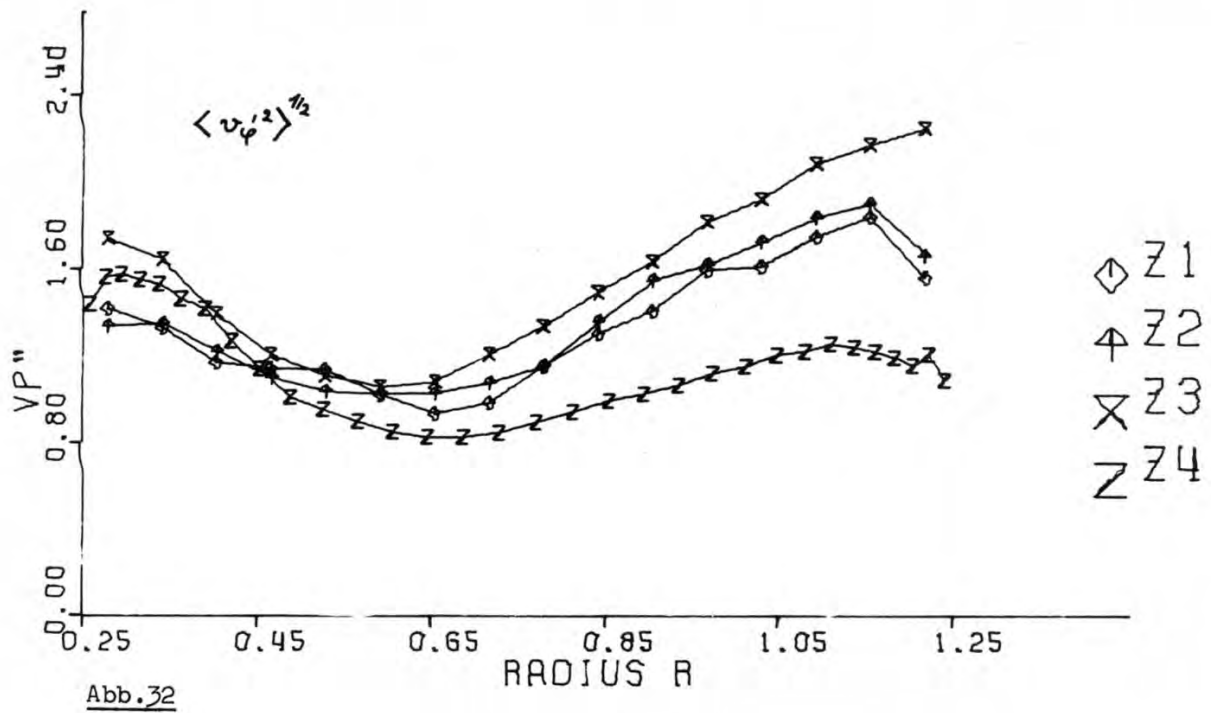
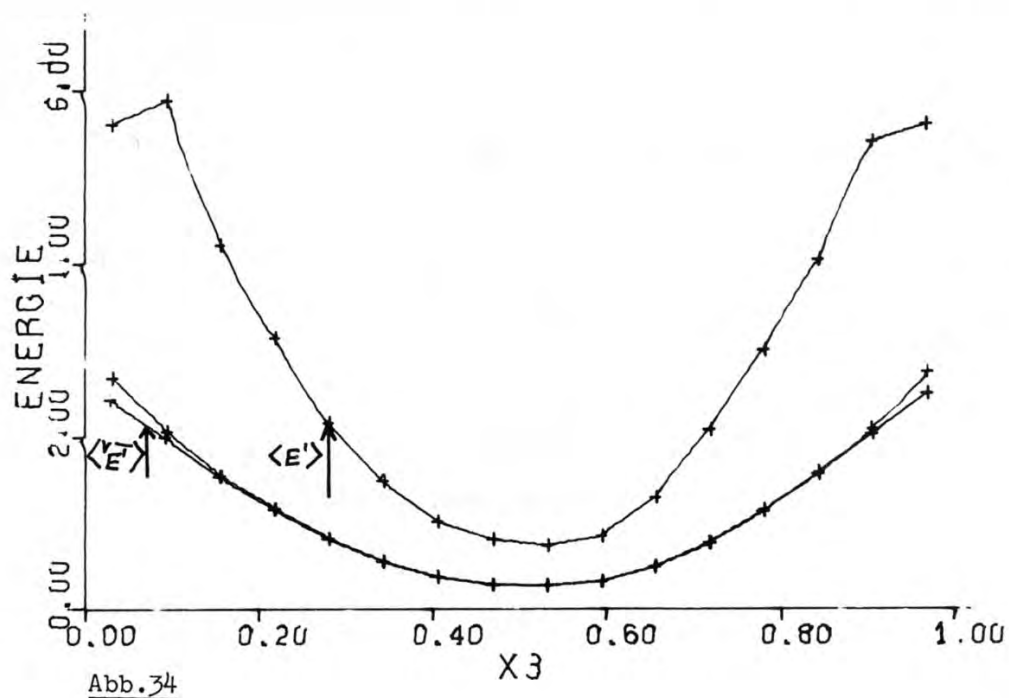


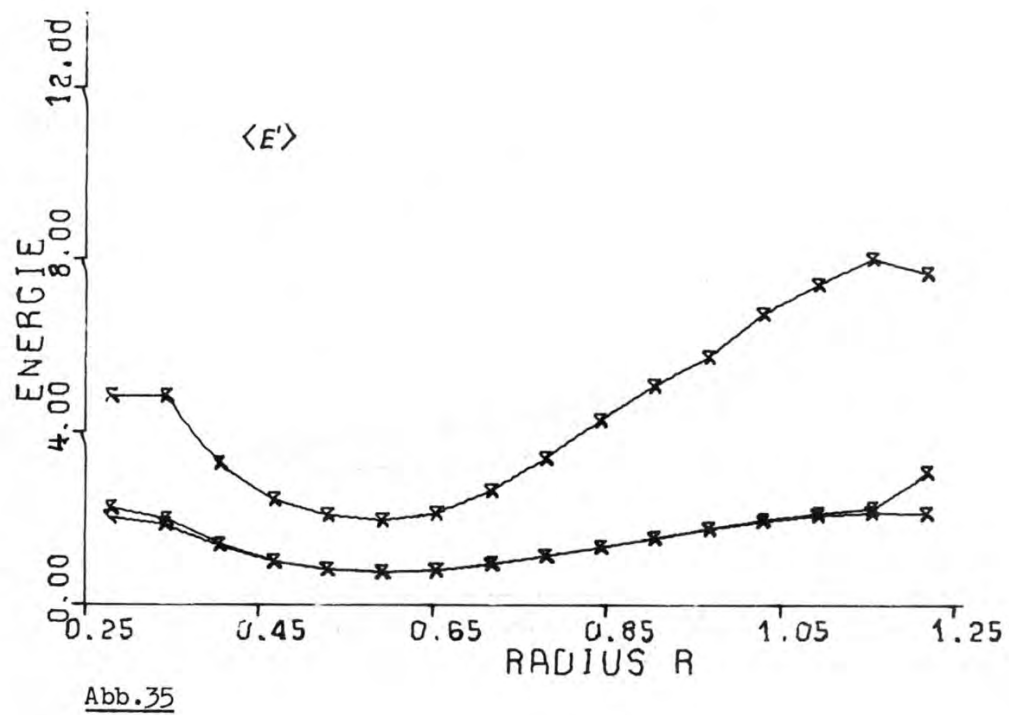
Abb. 29







+ K3



$\times Z3$

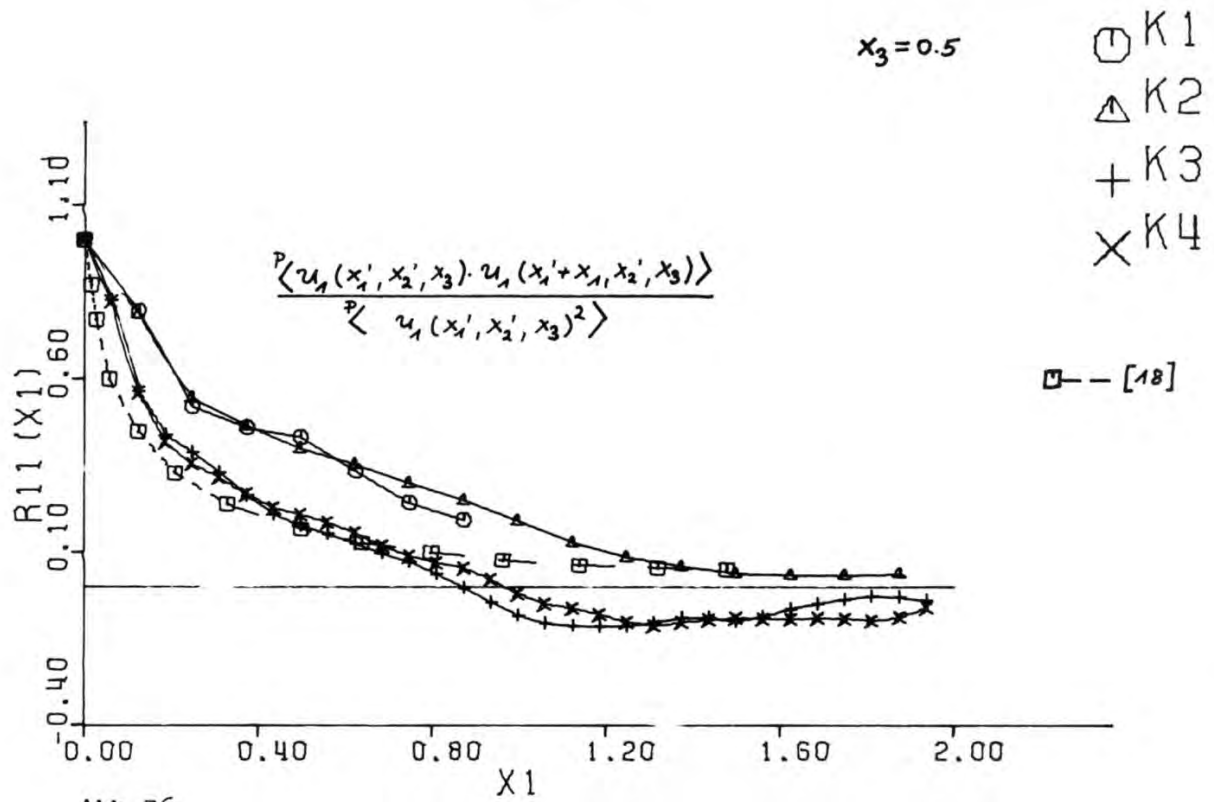


Abb. 36

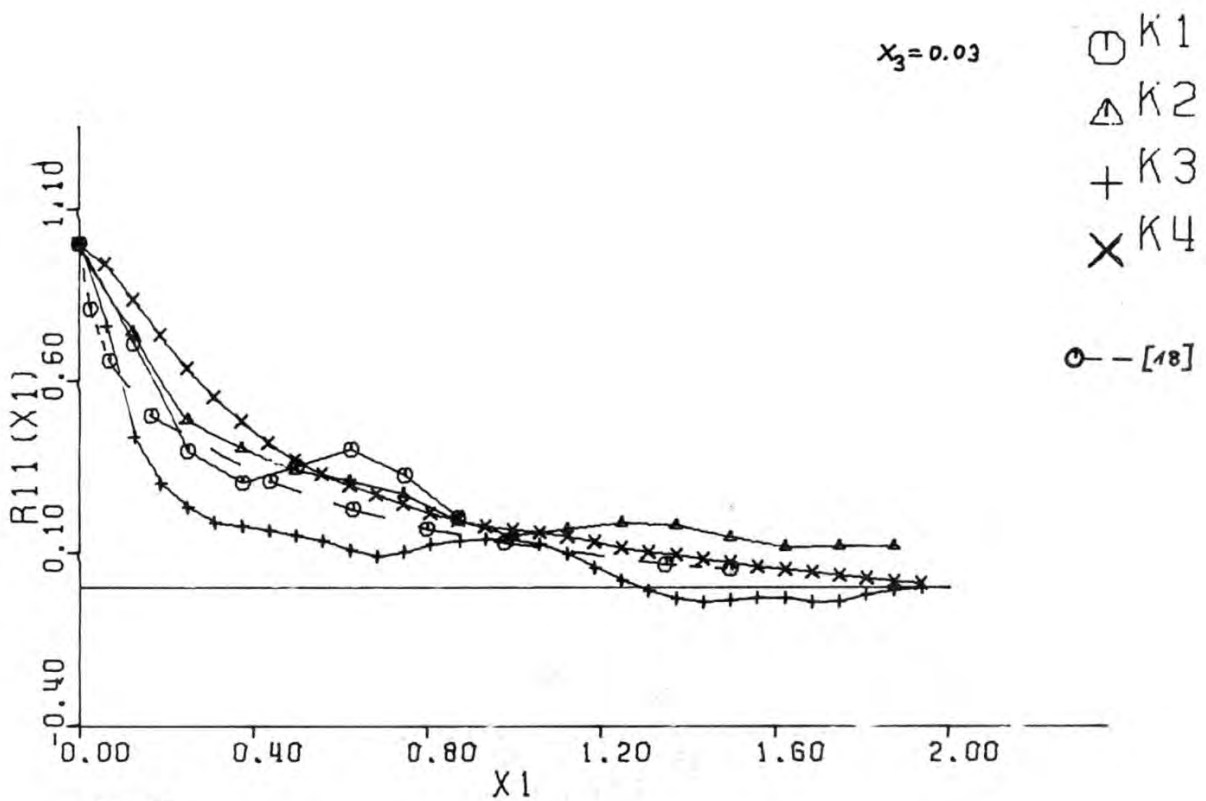


Abb. 37

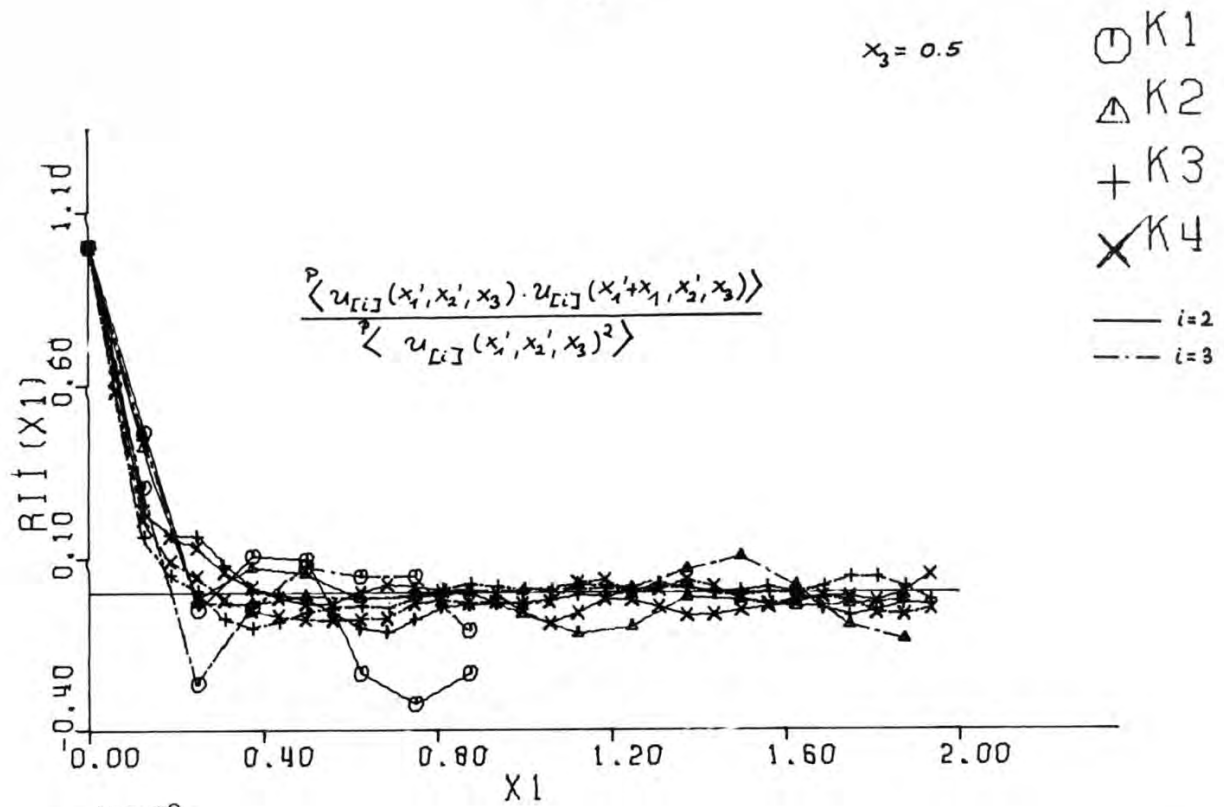


Abb. 38

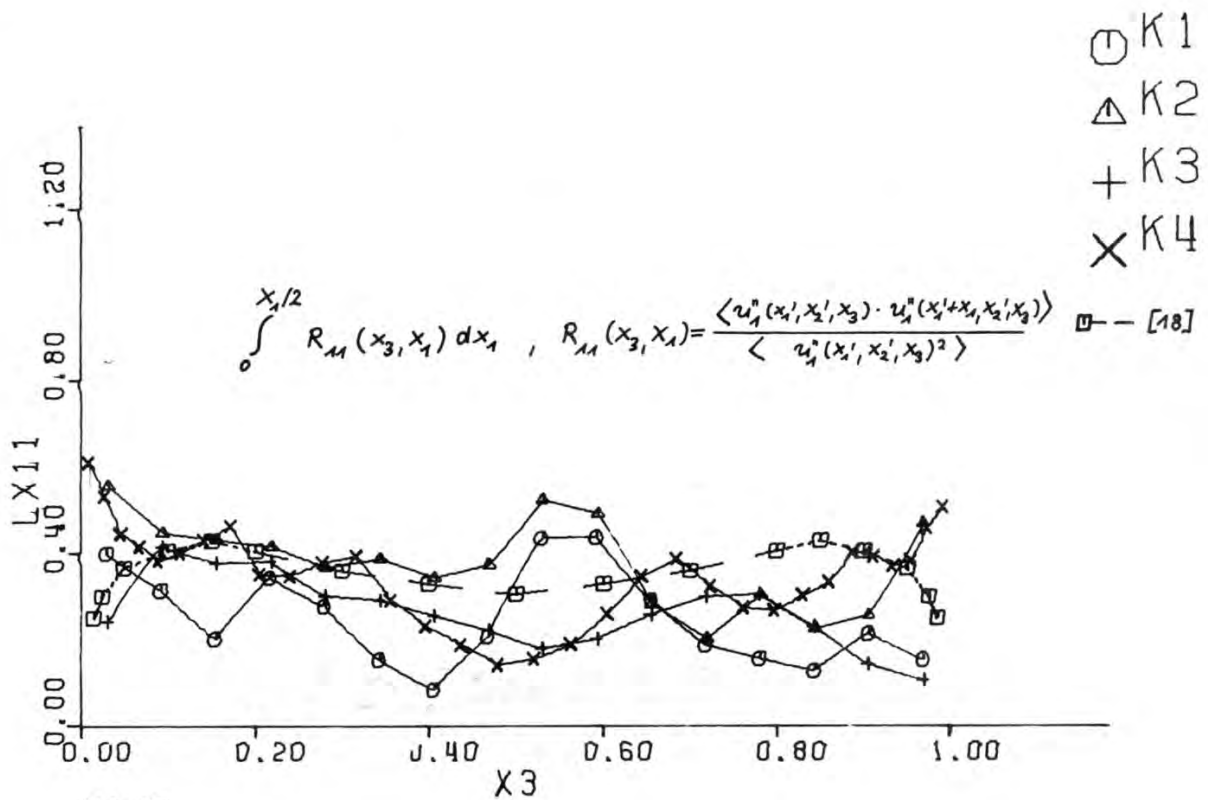
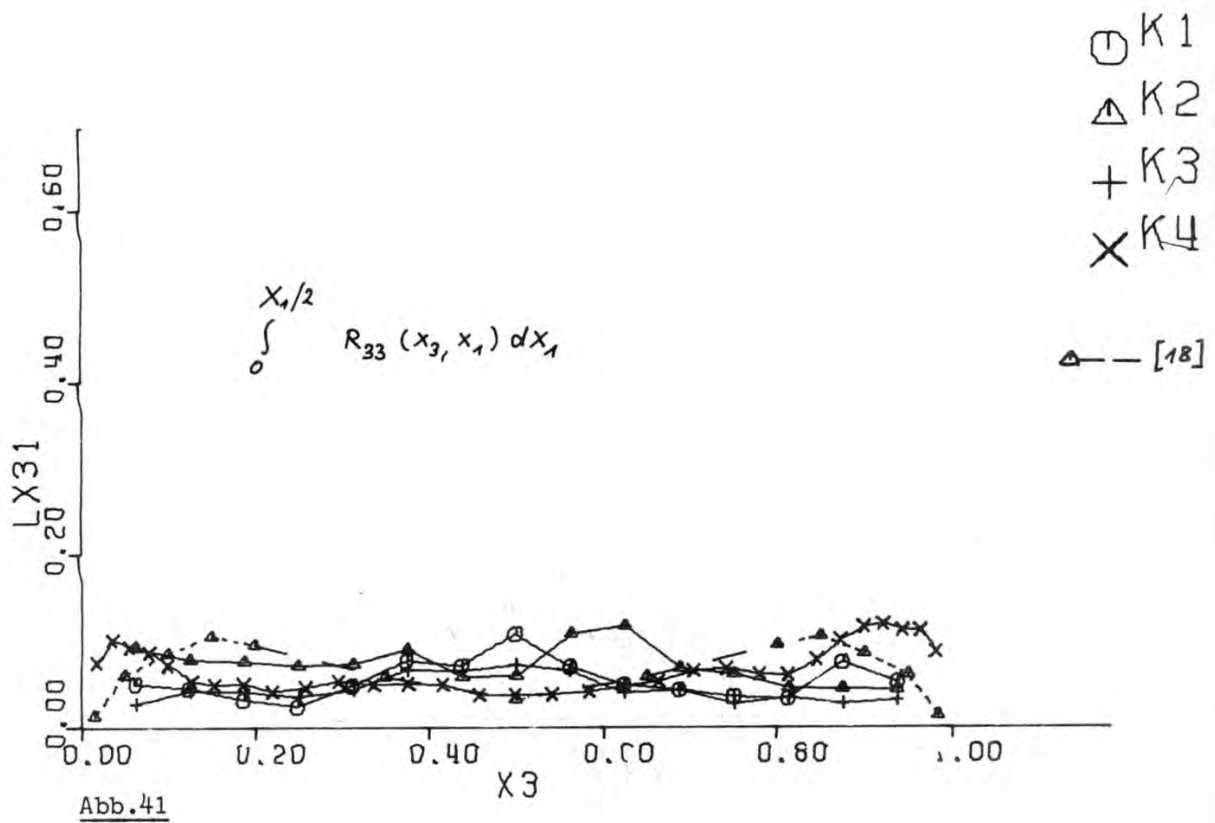
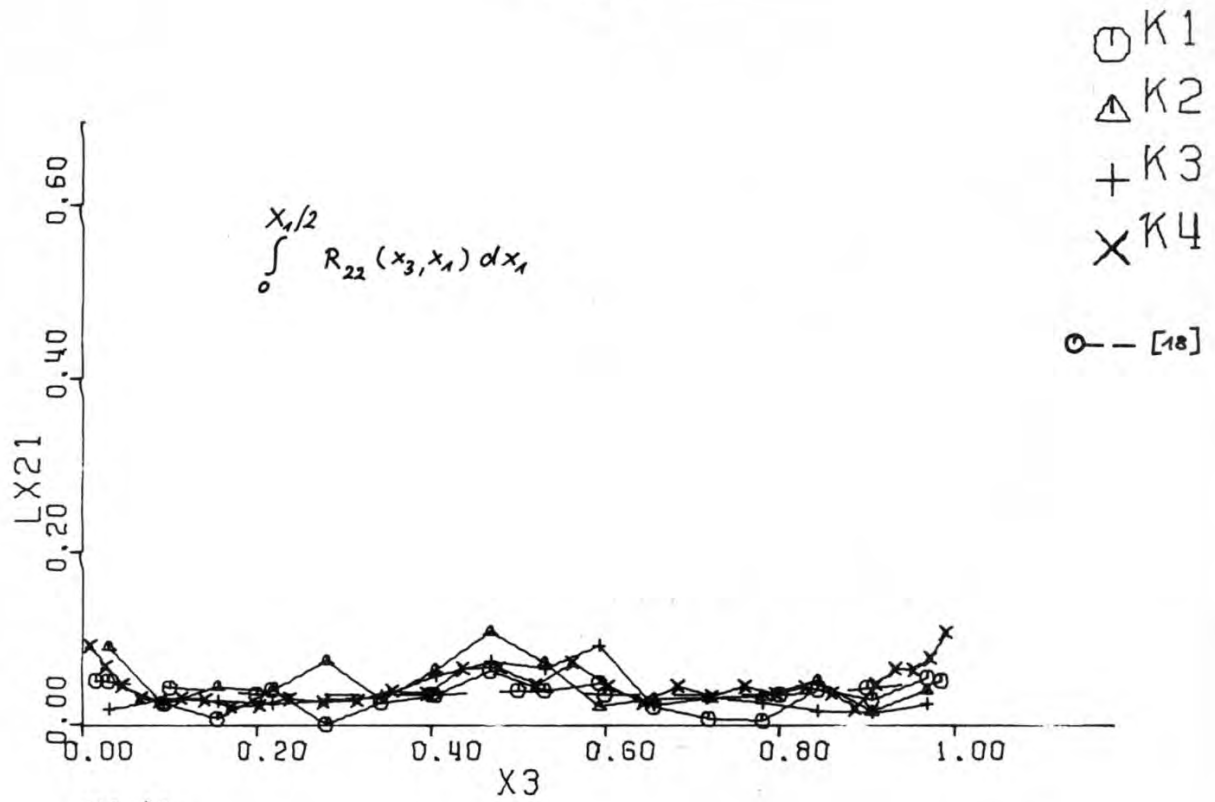


Abb. 39



Z3

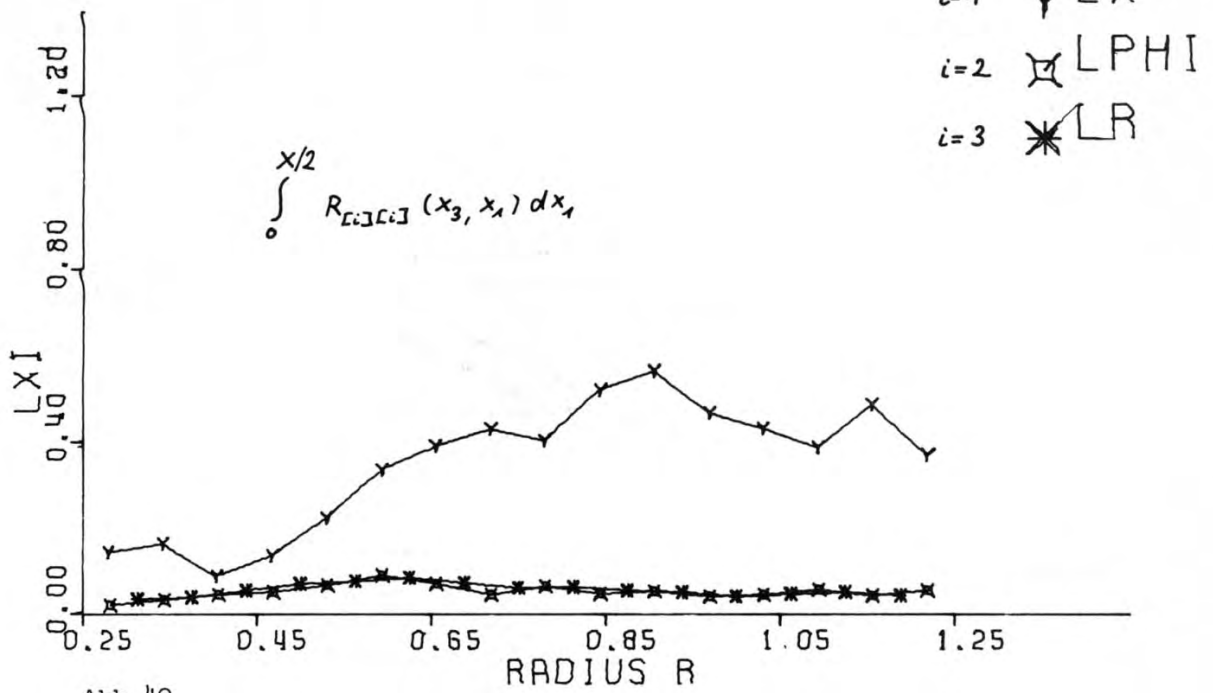


Abb.42

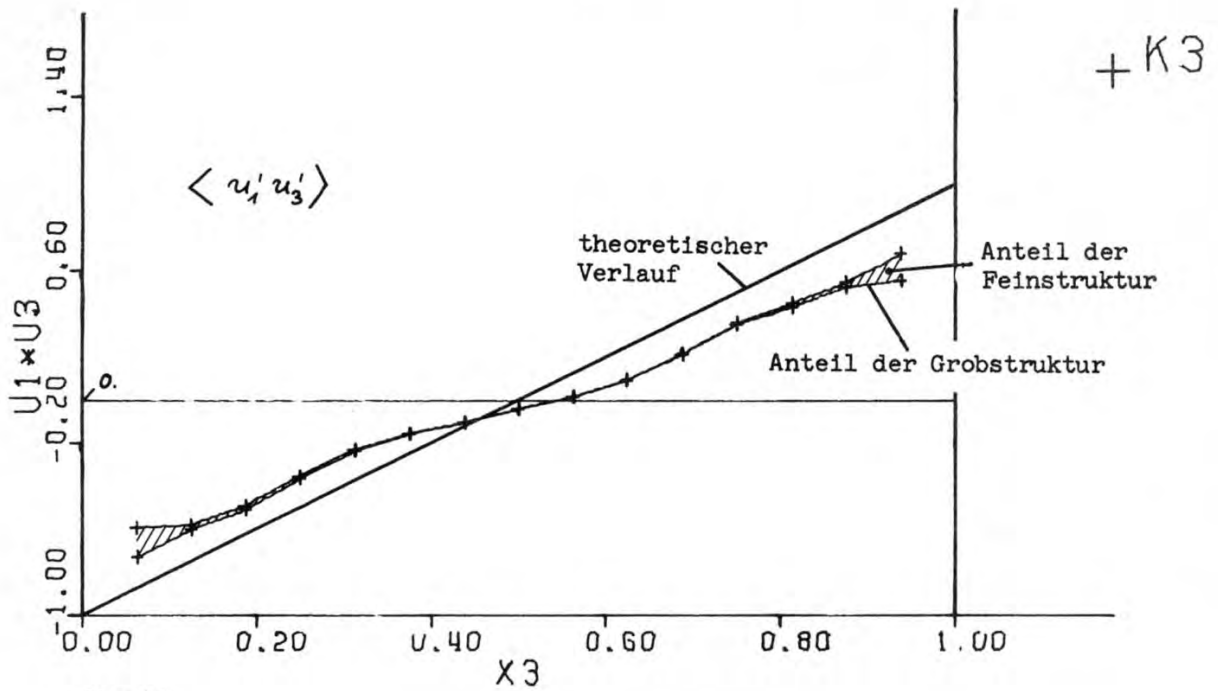


Abb. 43

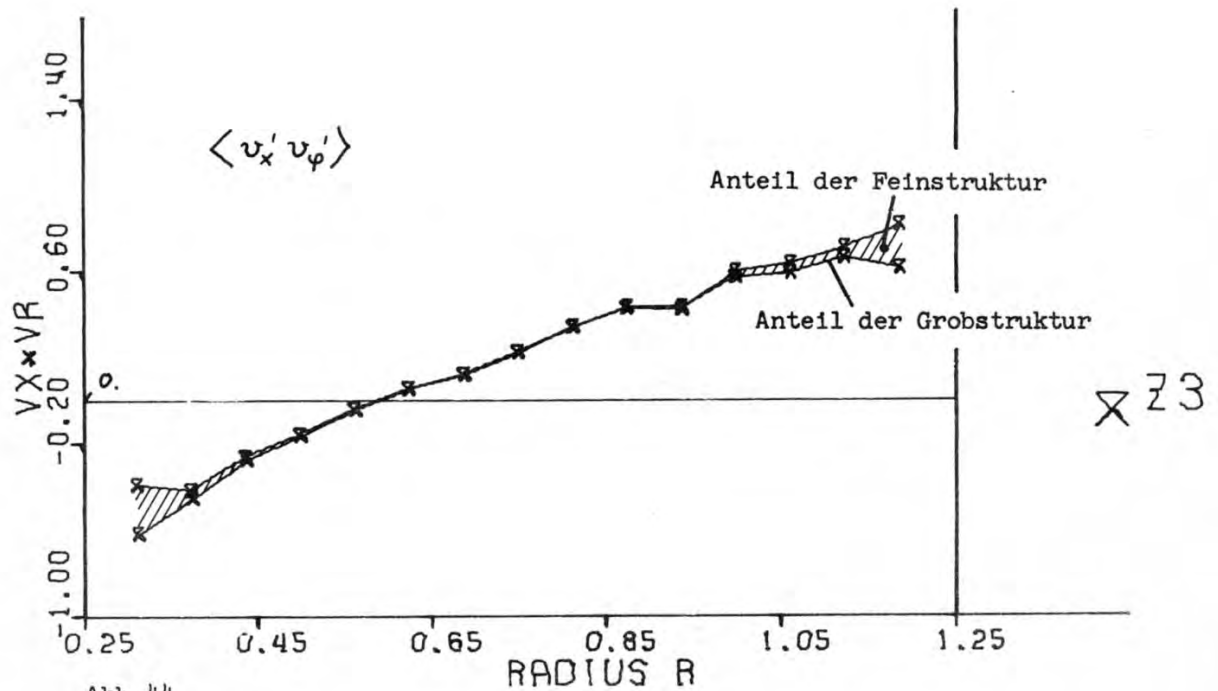


Abb. 44

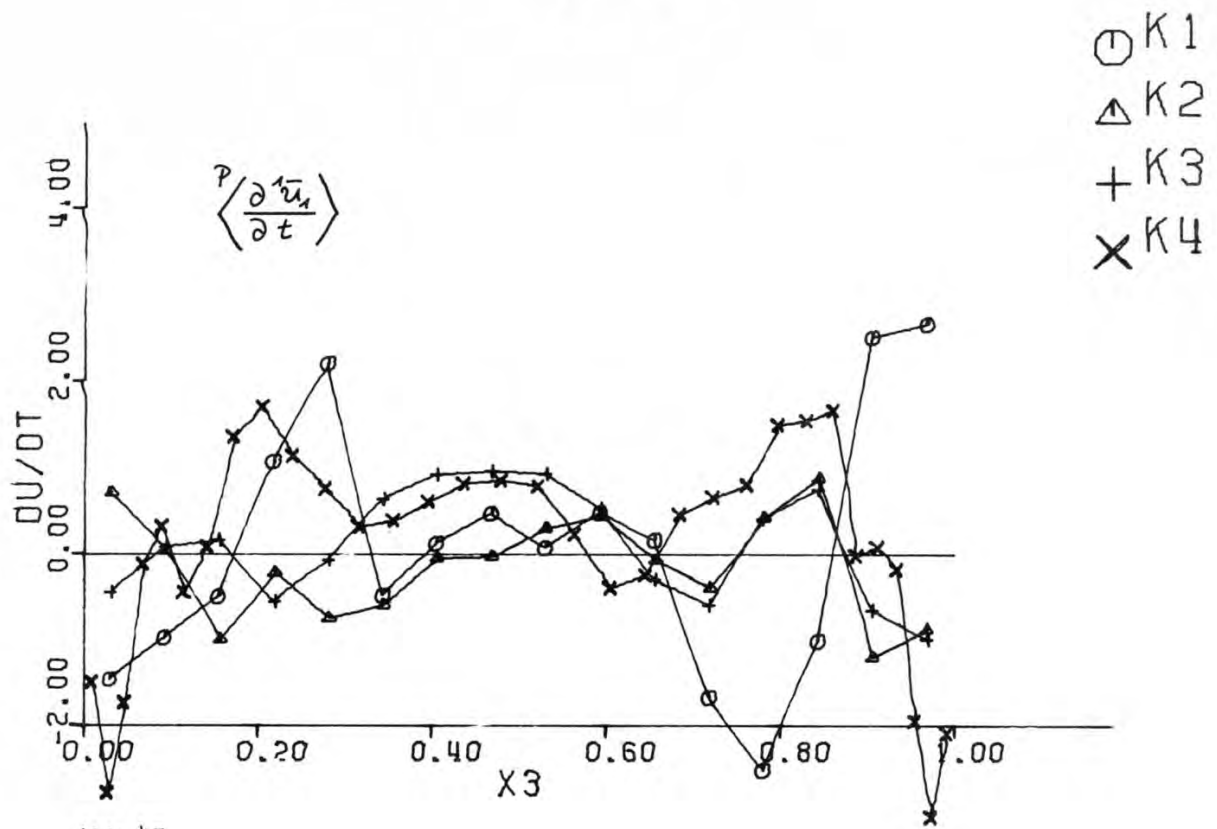


Abb.45

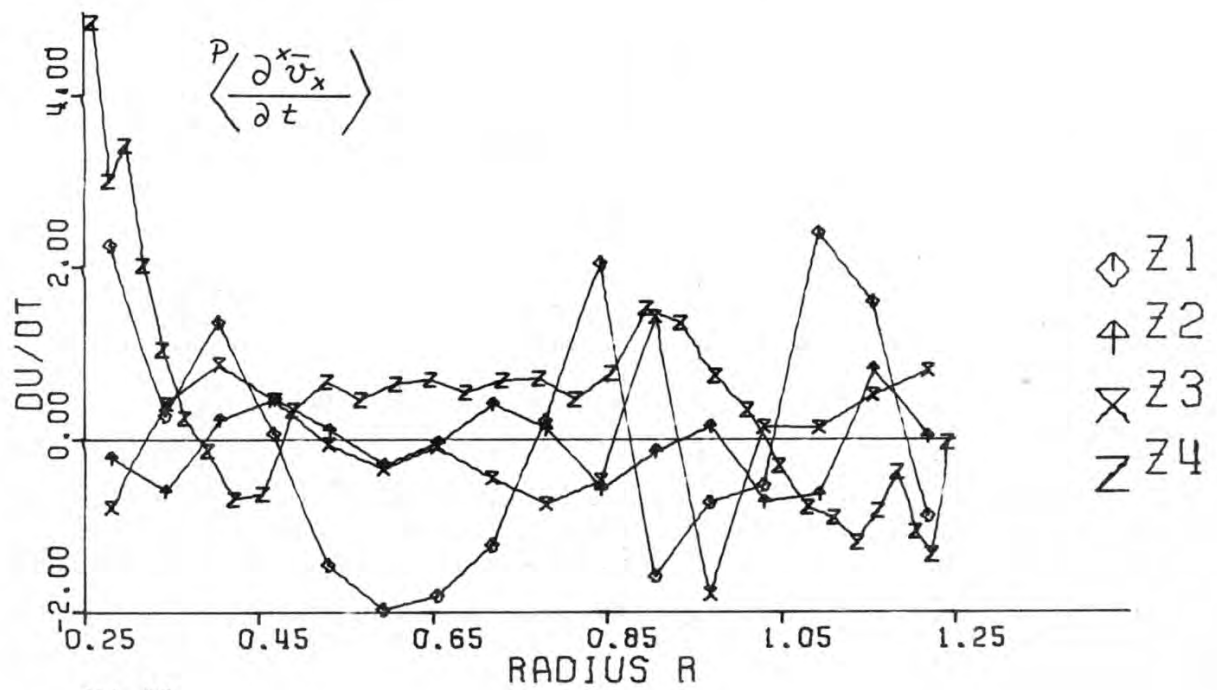


Abb.46

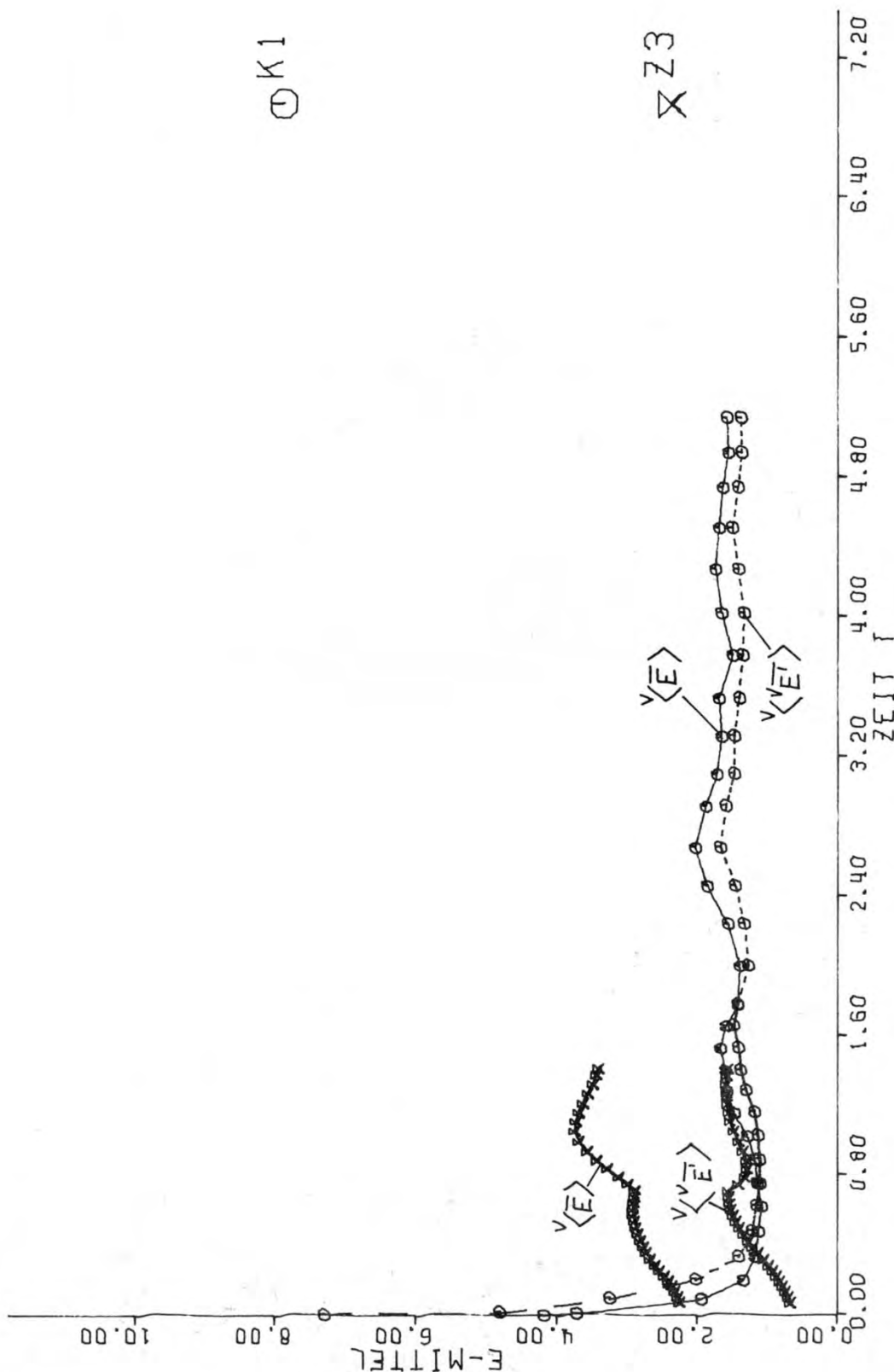


Abb. 47

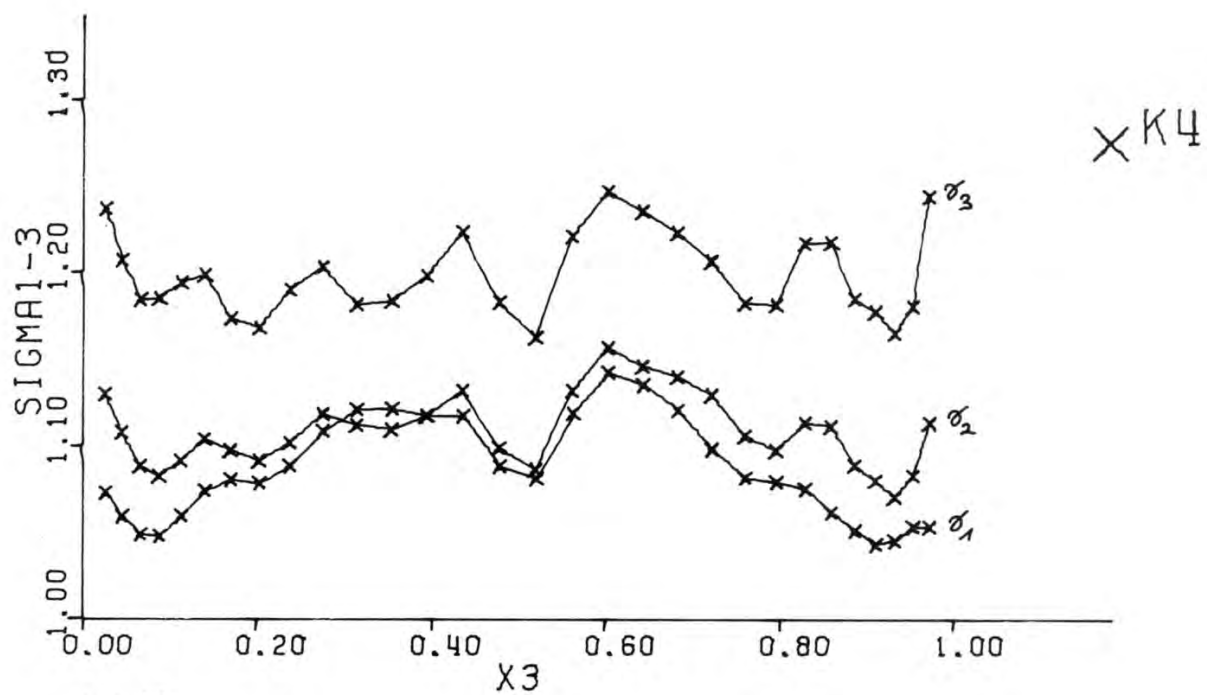


Abb.48

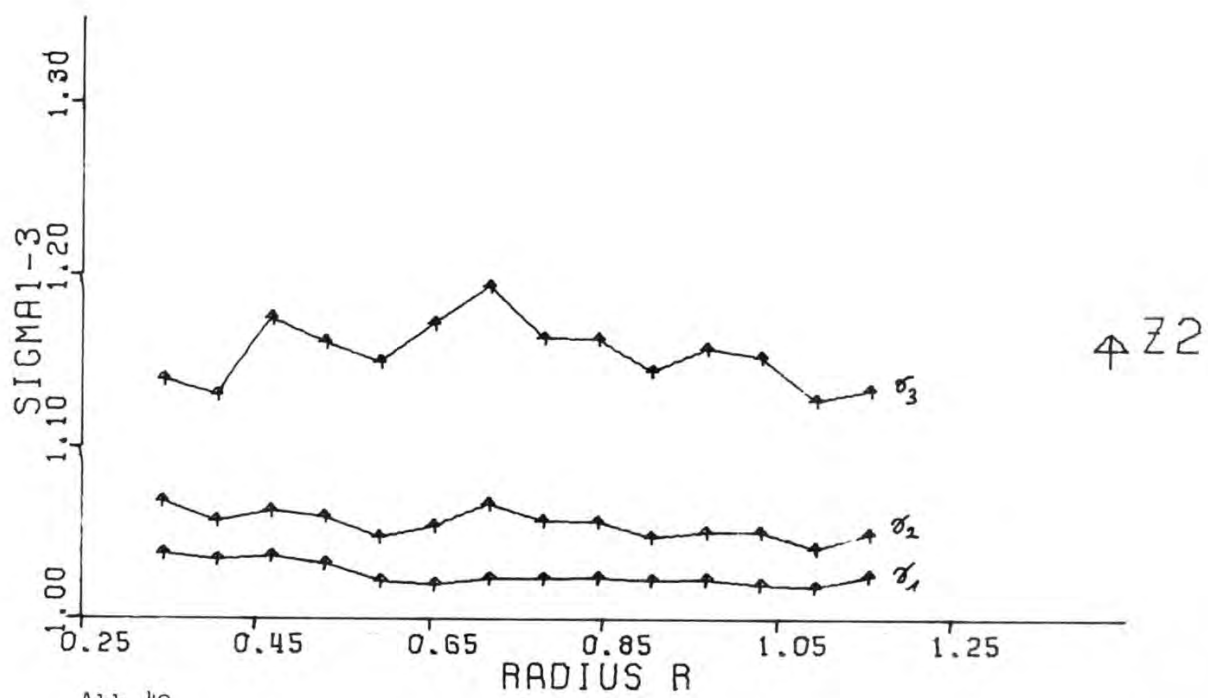
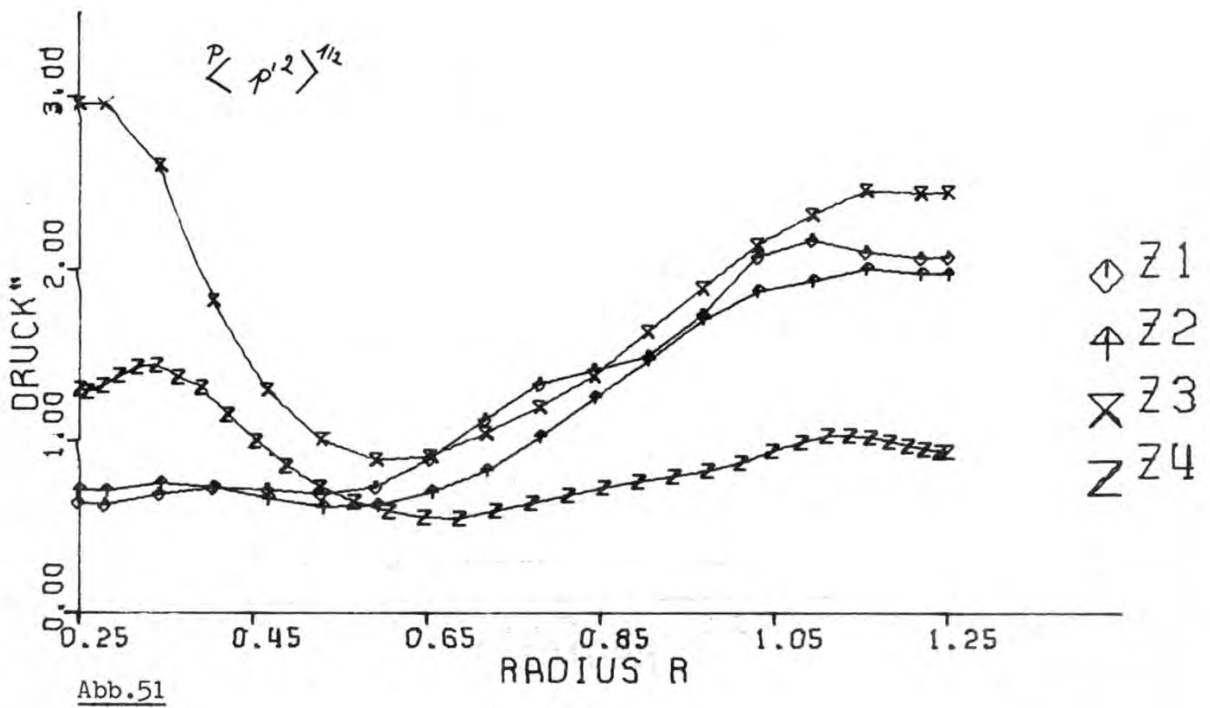
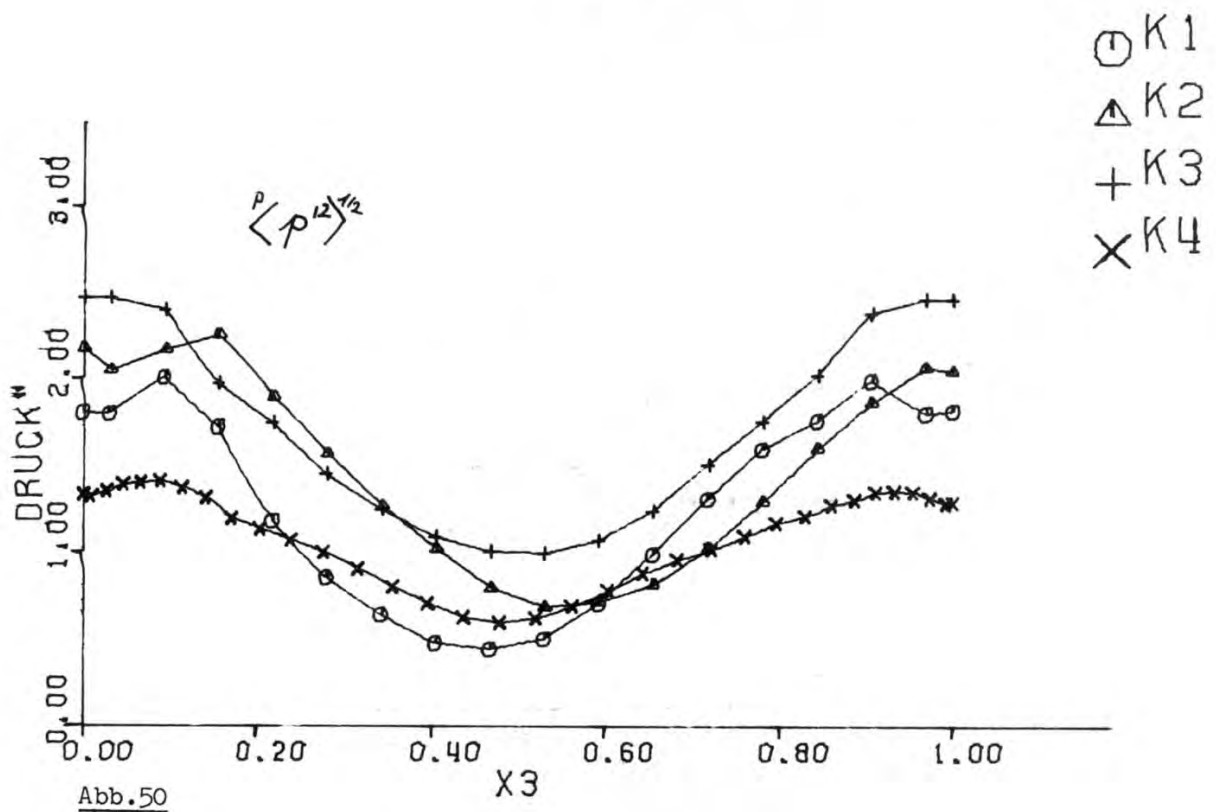
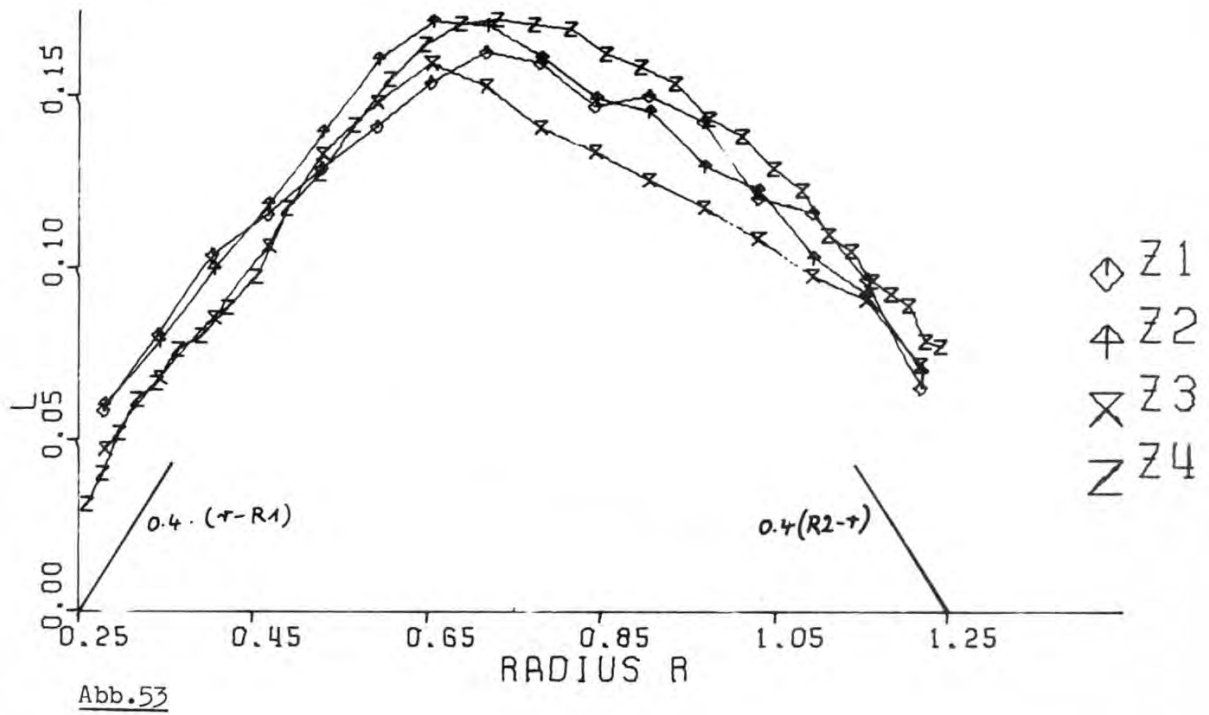
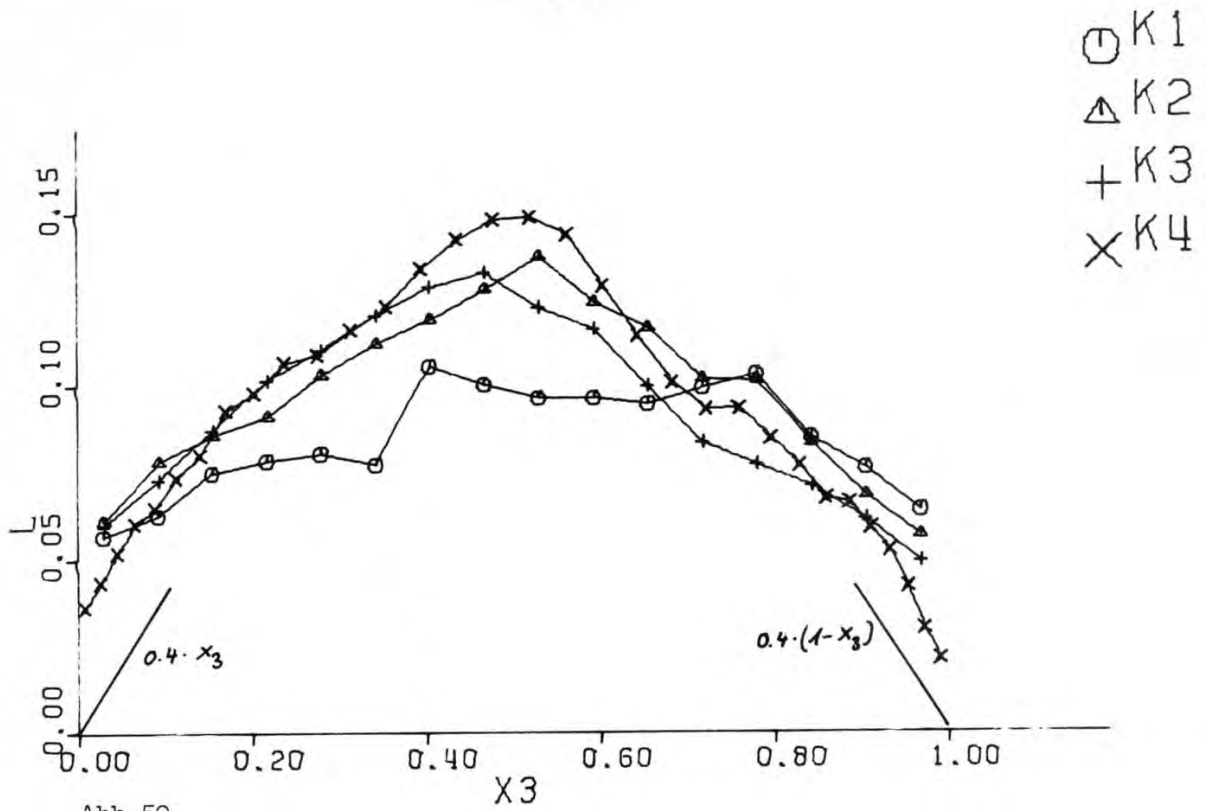
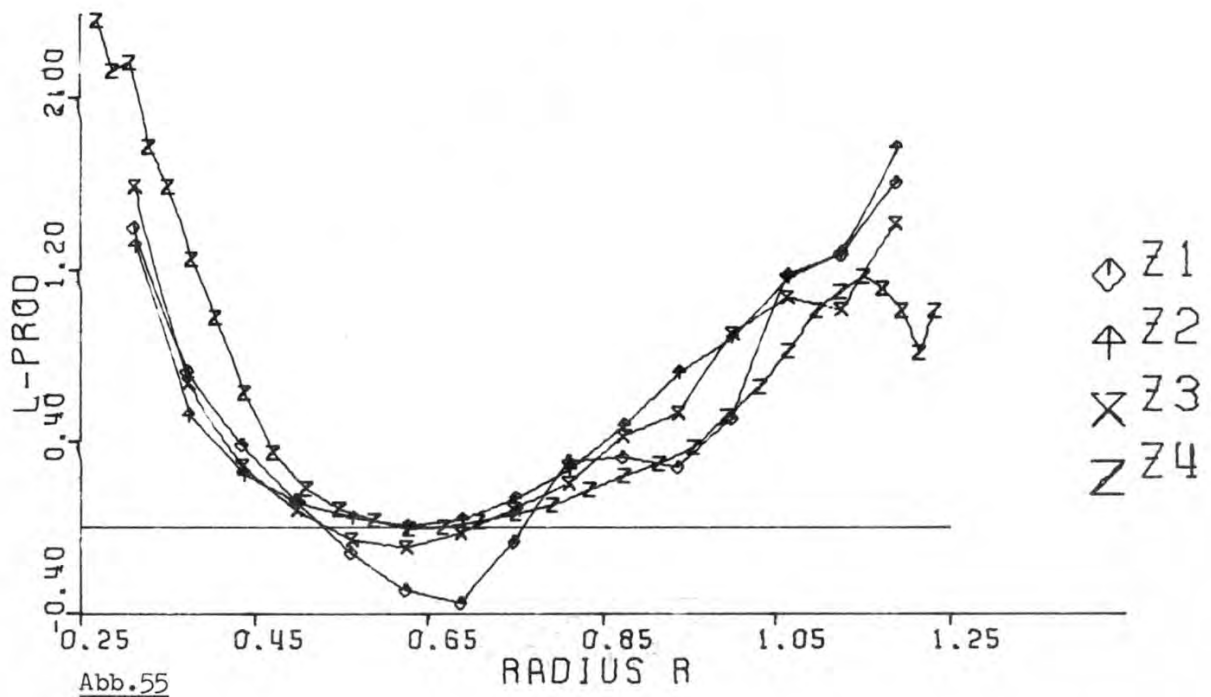
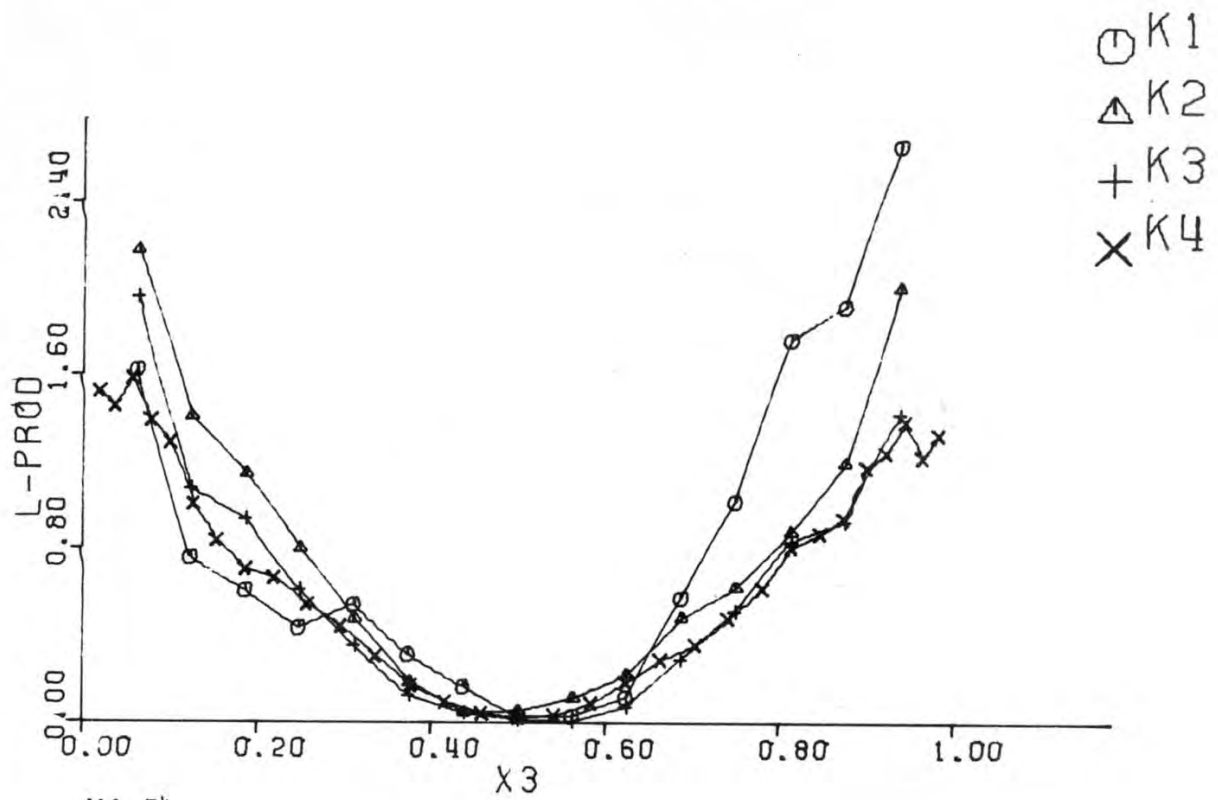
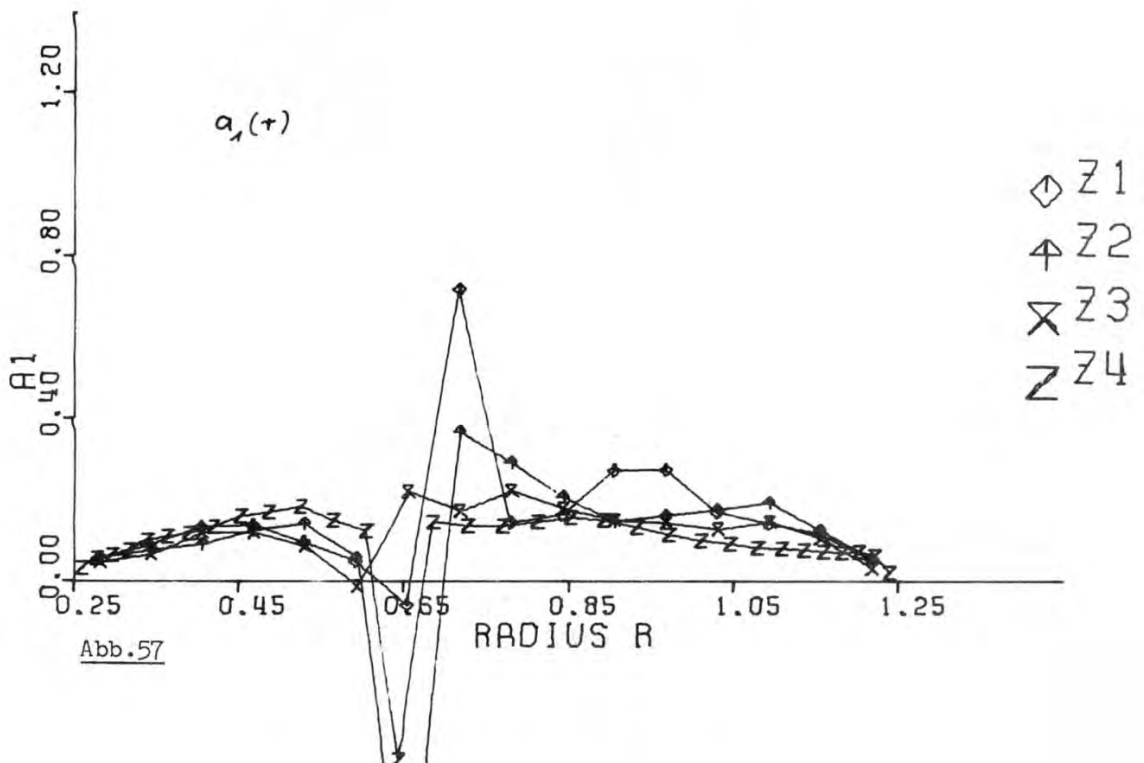
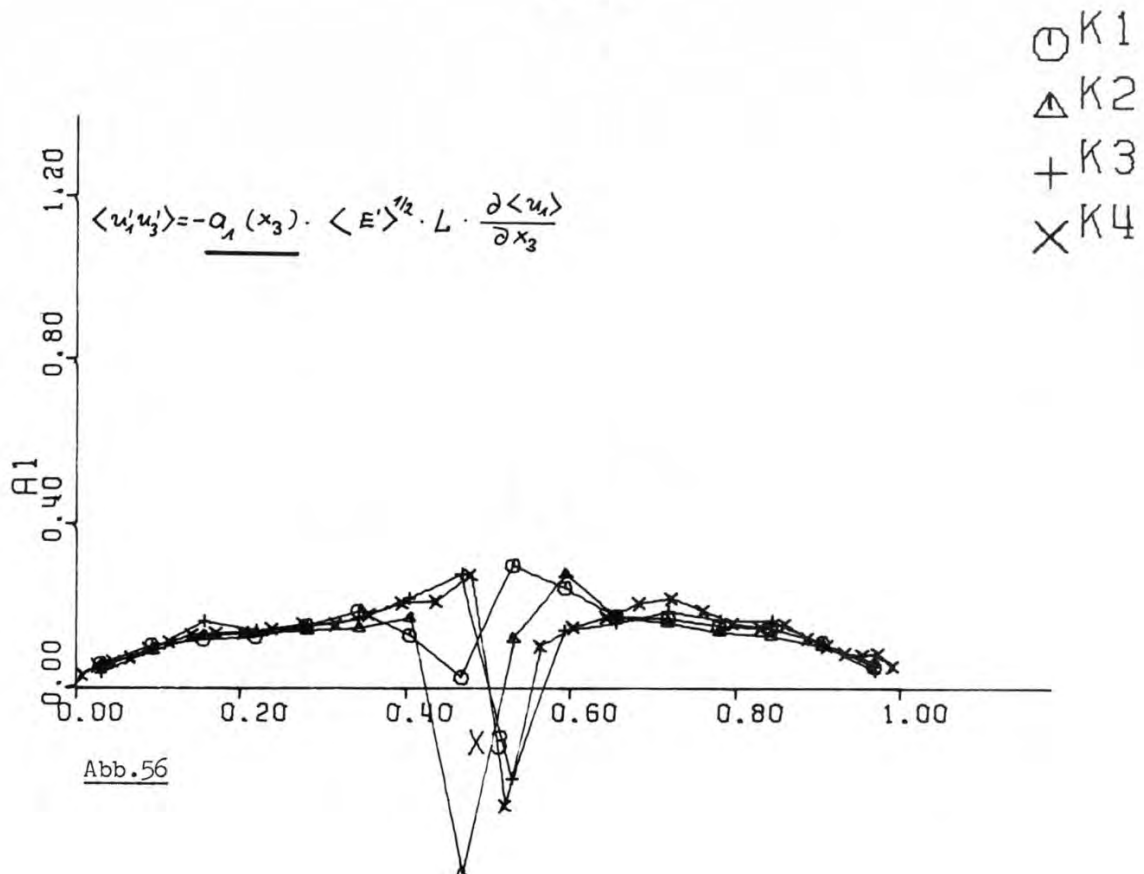


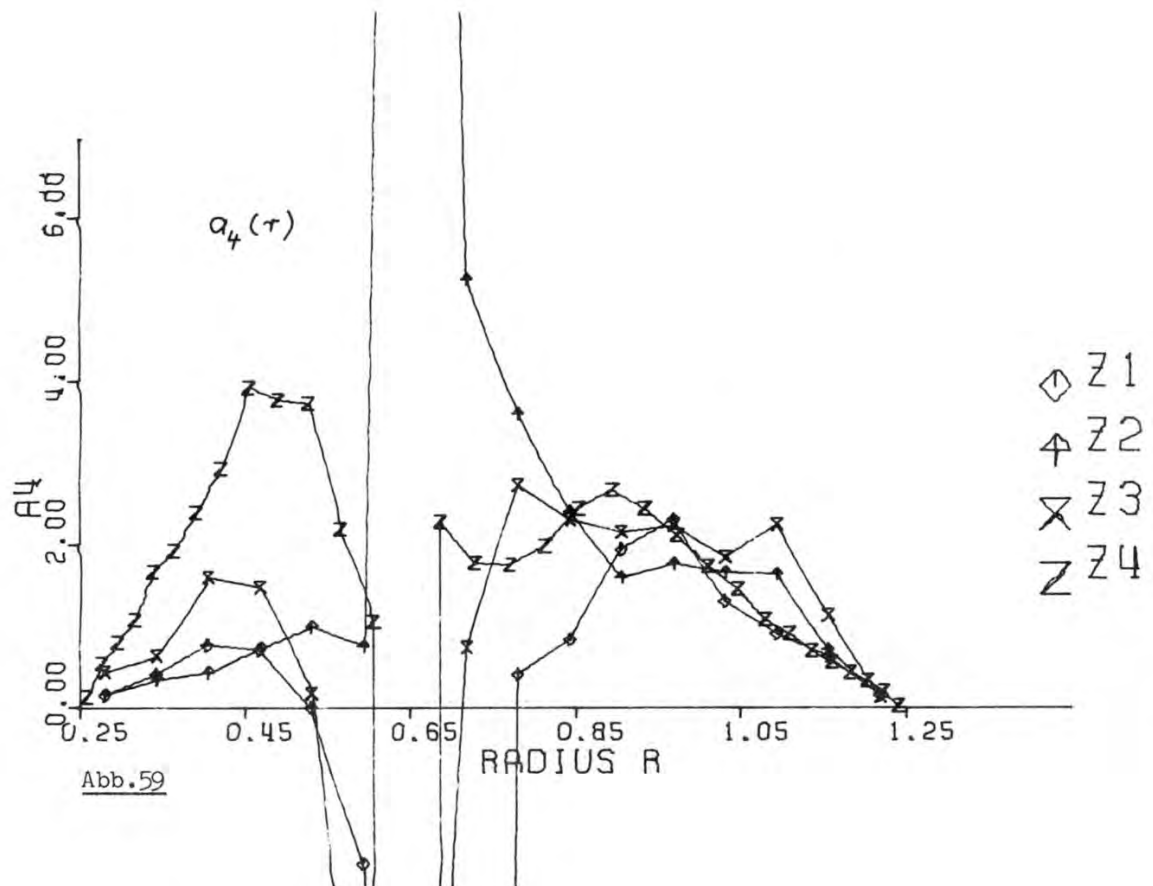
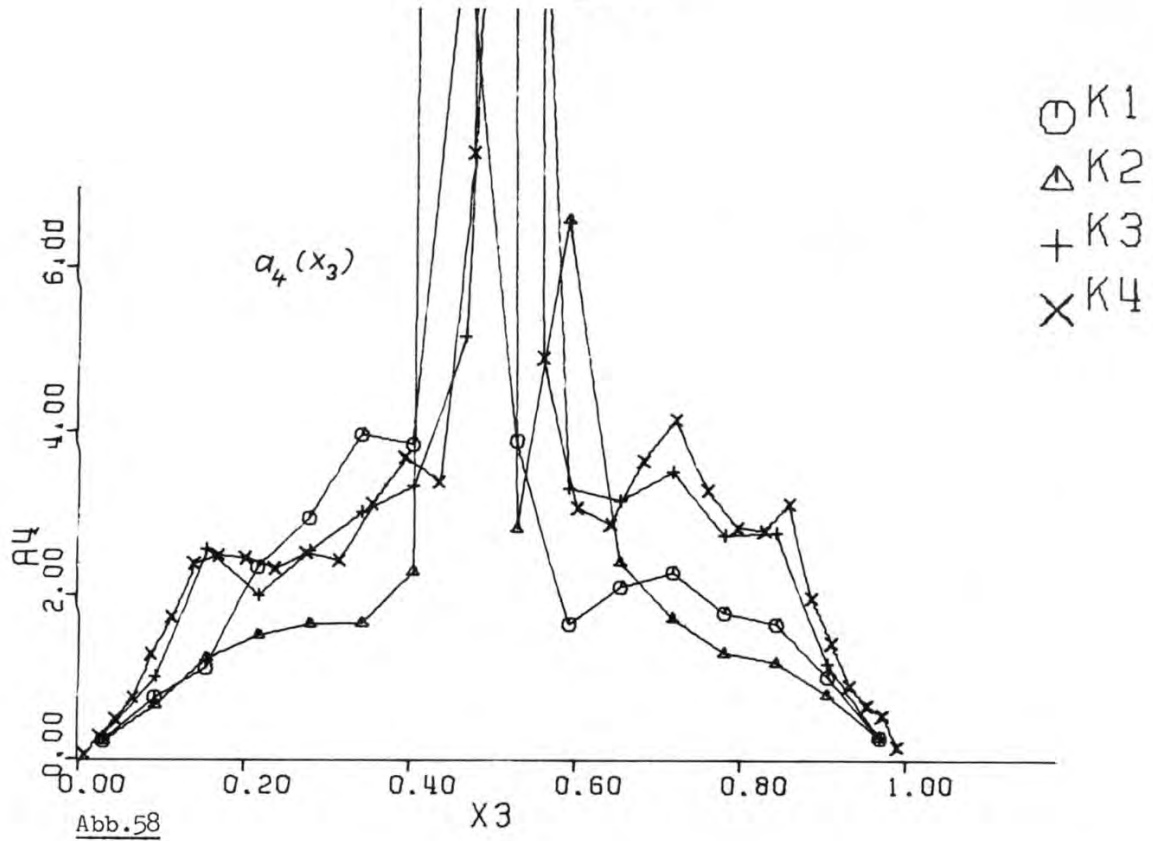
Abb.49

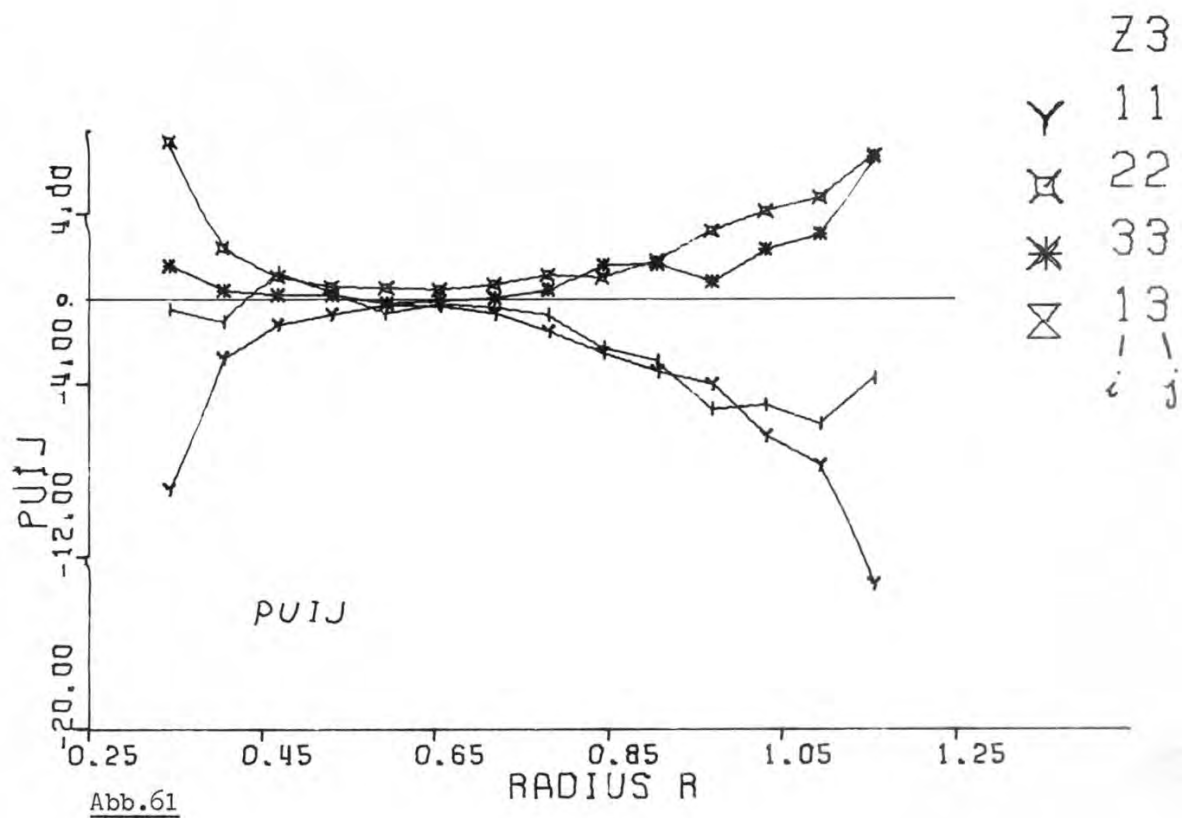
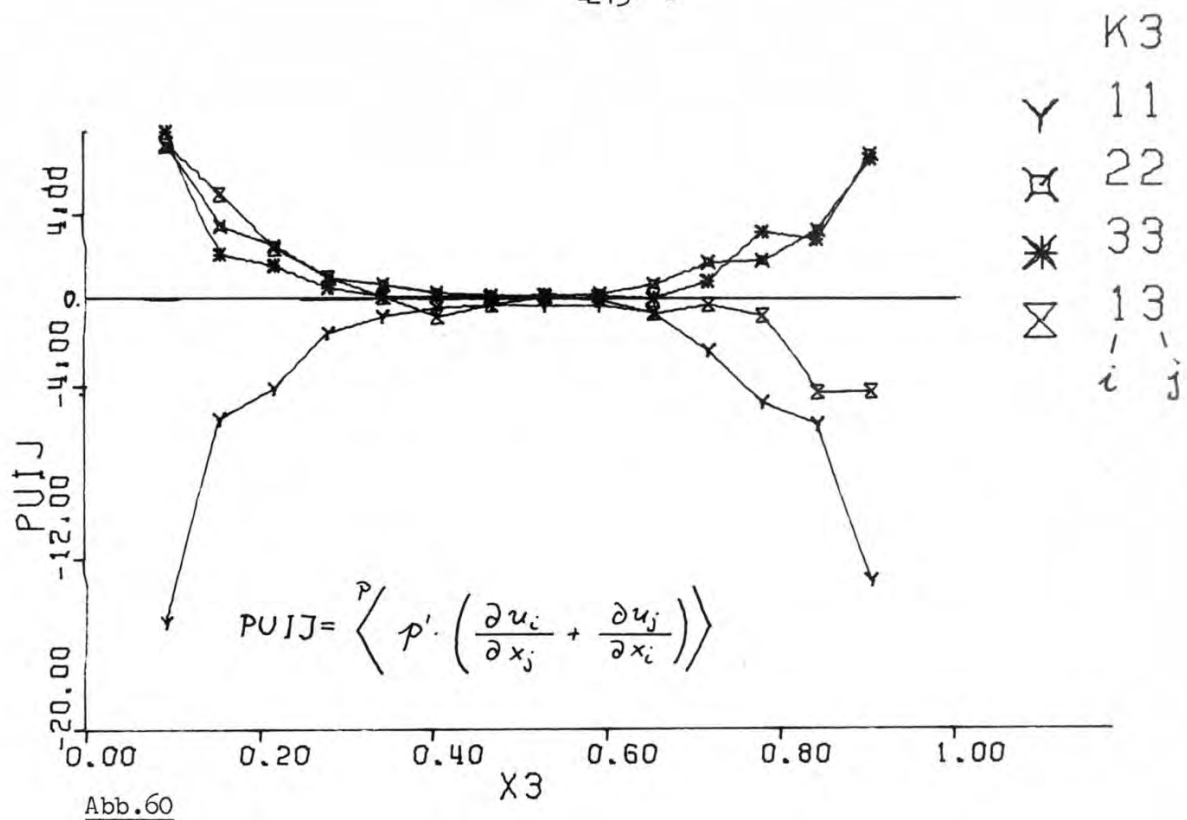


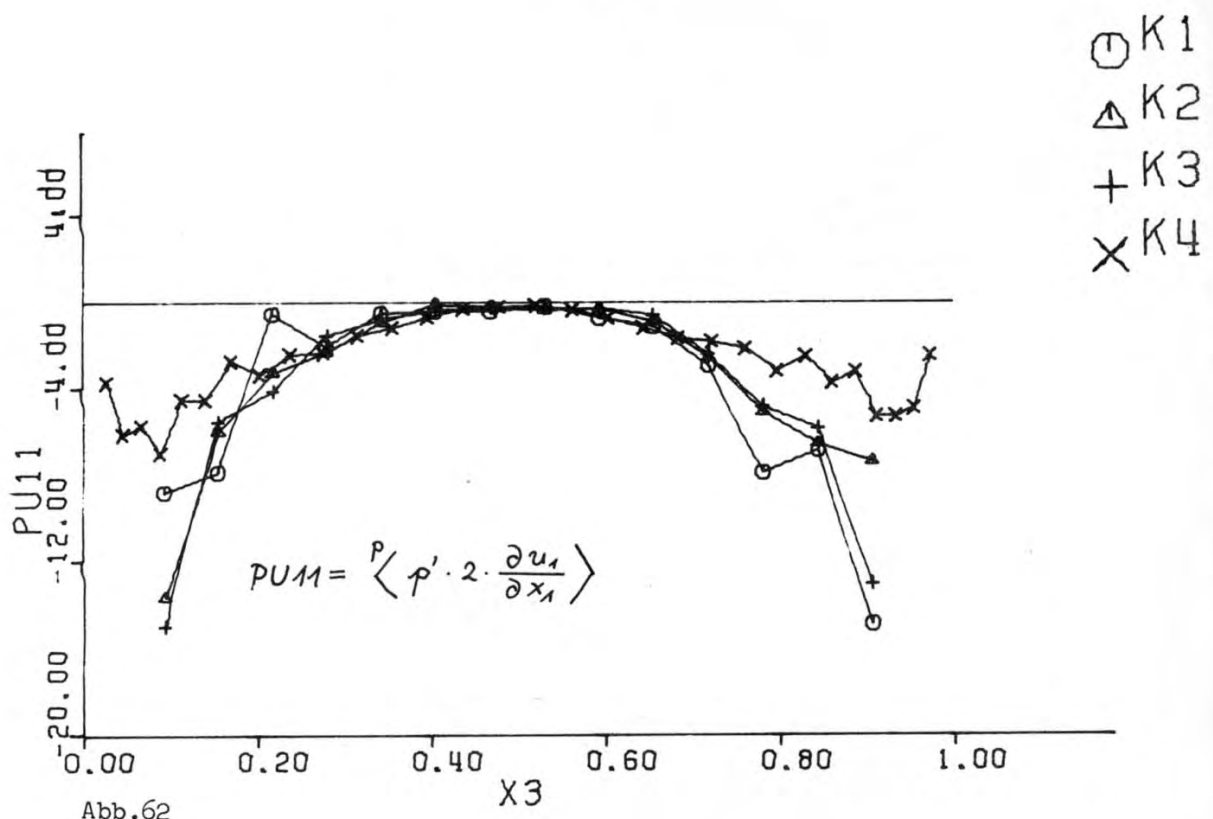


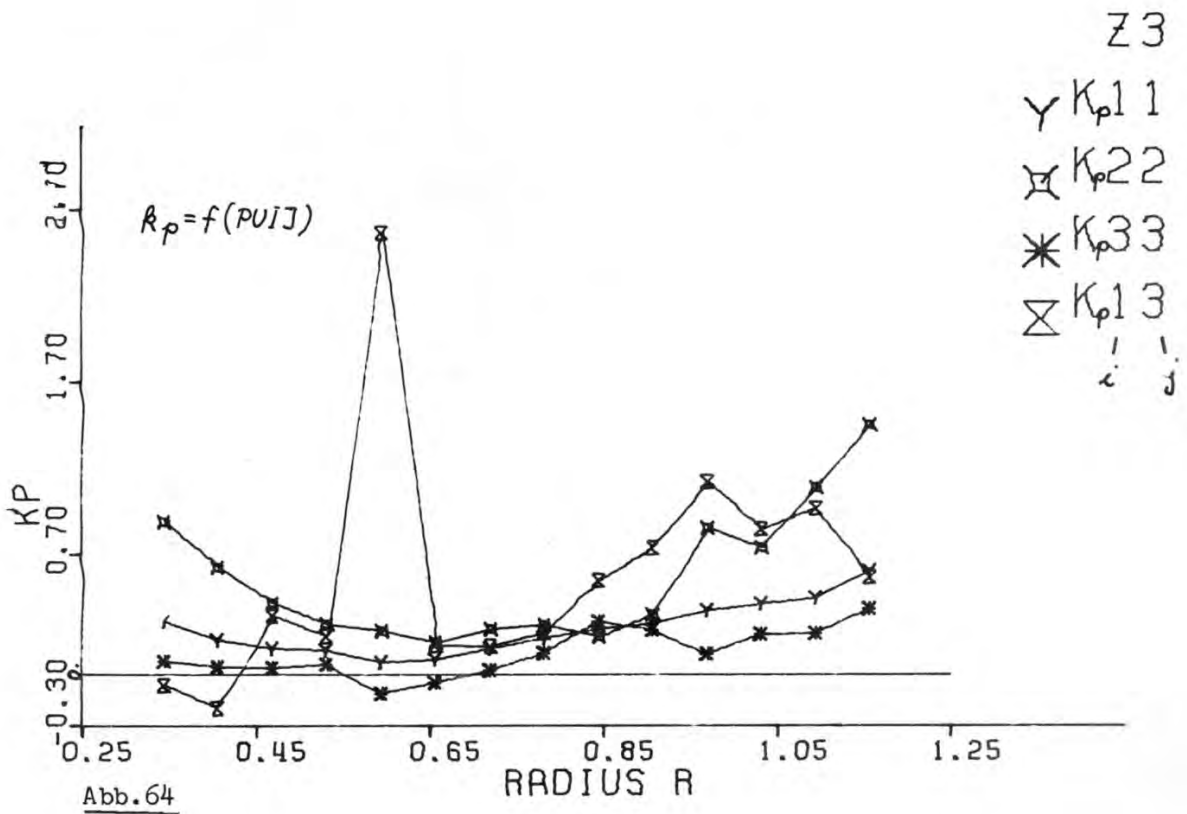
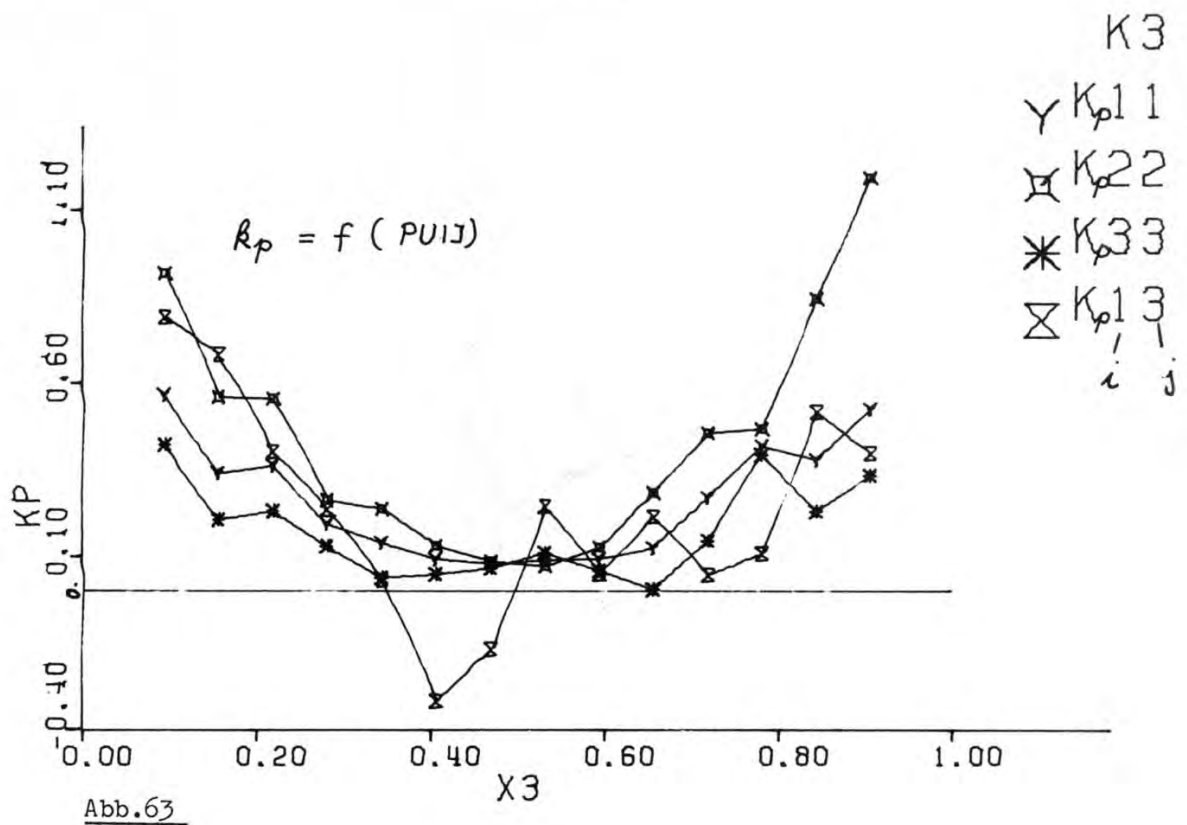












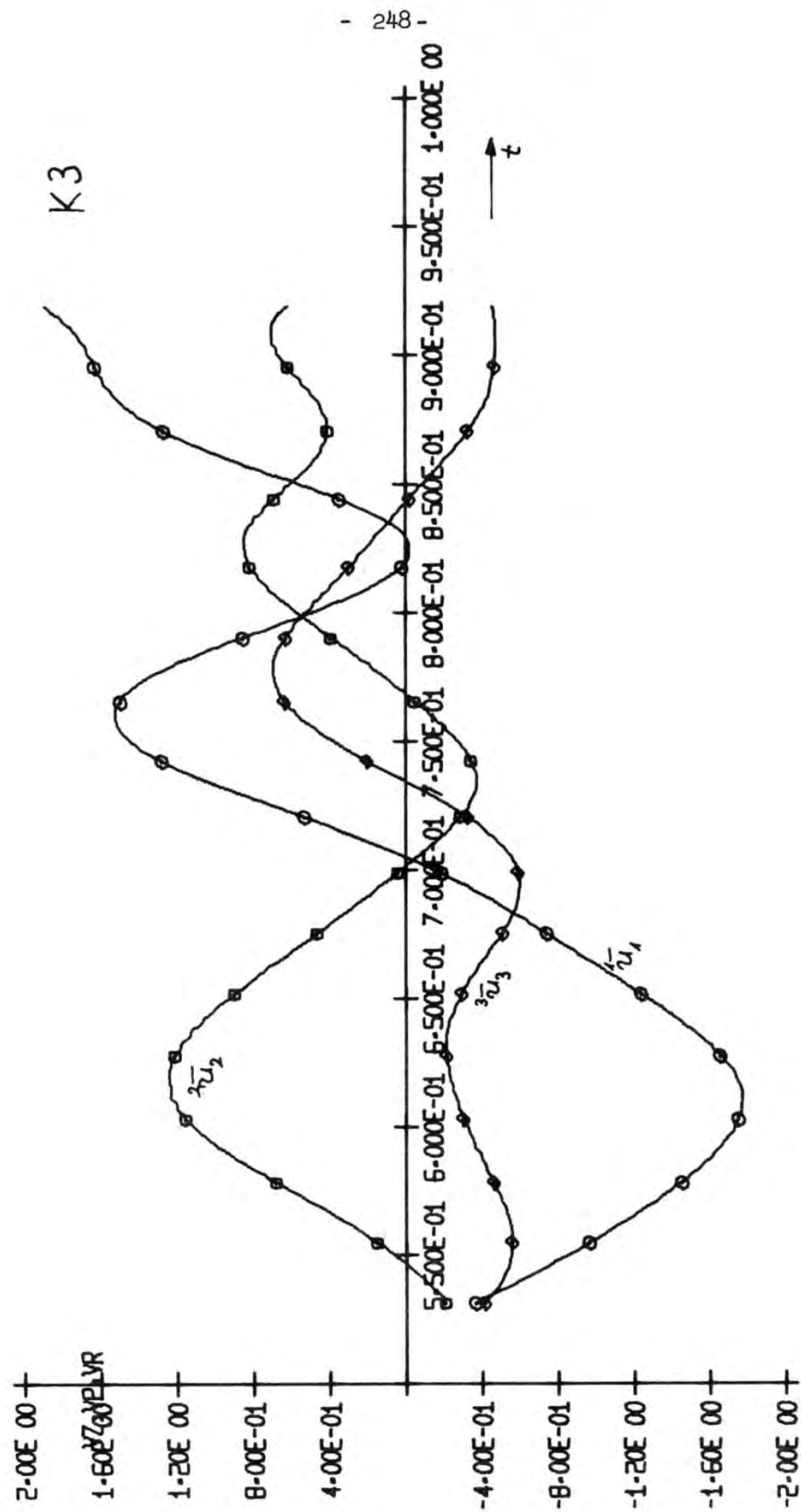


Abb.65: Geschwindigkeitsschwankungen der Grobstruktur als Funktion der Zeit t an einem Ort bei $x_3=0.6$ für die Plattenströmung, Fall K3

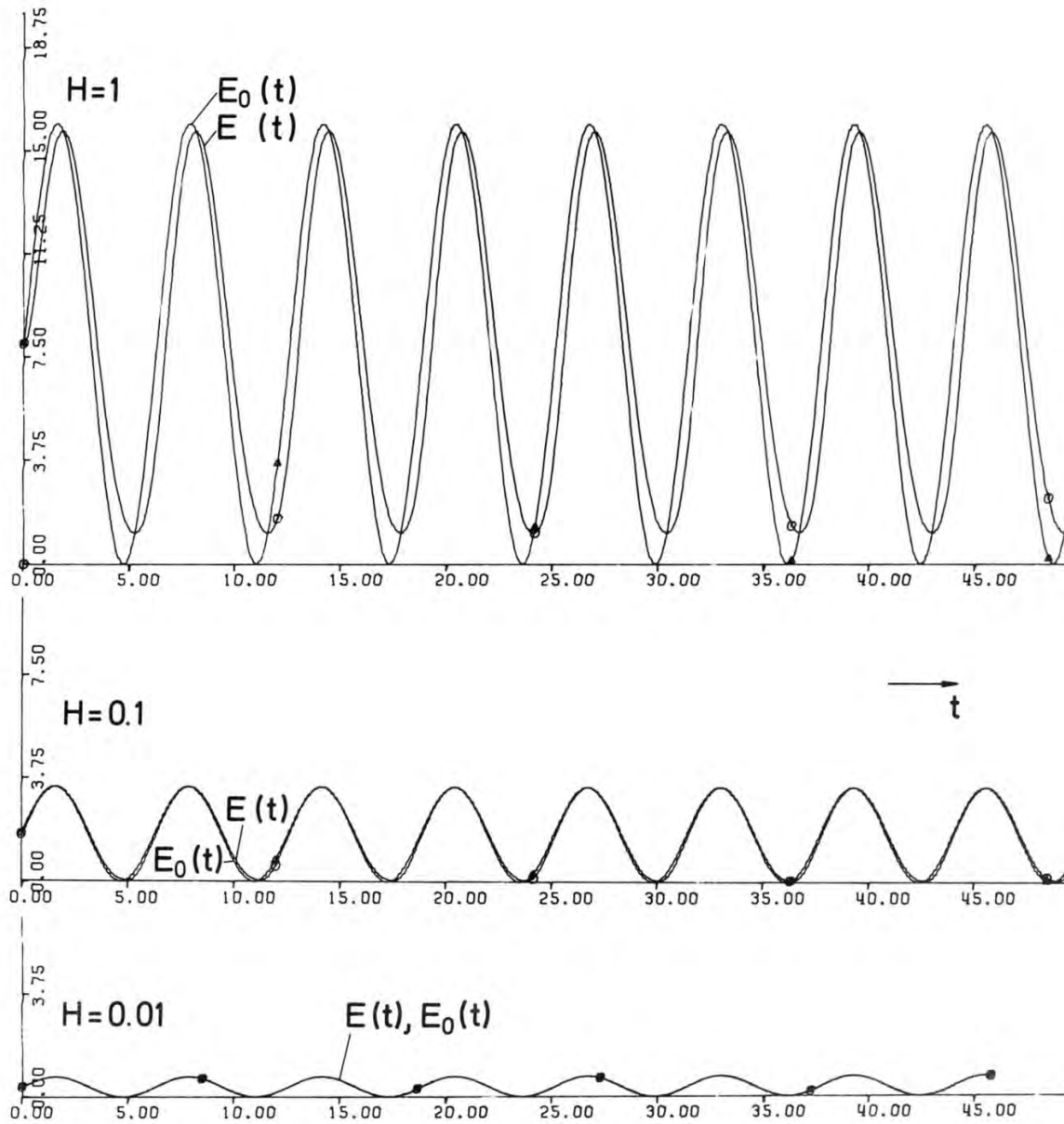


Abb.66: Kinetische Energie der Feinstruktur als Funktion der Zeit t bei periodischer Quelle für verschiedene Maschengrößen H ; $E(t)$ ist die Lösung der Modell-Differentialgleichung, $E_0(t)$ ist die quasistationäre Näherung.